* جلسه سیزدهم : یکشنبه : ۸۲/۱/۳۱

* خطای حالت دائم :

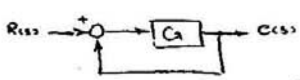
یادآوری . ورودی پله : $e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K_p}$

ثابت خطای موقعیت : $K_p = \lim_{s\to 0} G(s)$

دیدیم :

$G(s) = K\cdot\frac{(1+T_{z_1}s)\cdots(1+T_{z_m}s)}{s^N(1+T_{p_1}s)\cdots(1+T_{p_n}s)}$ ونوع سیستم را نیز تعریف کردیم .

اکنون ورودی شیب را بررسی می‌کنیم :




$r(t) = t \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$

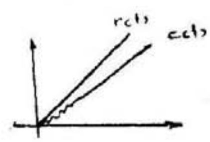
$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}\cdot R(s) = \frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s^2}$ $\quad e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)}$

ثابت خطای سرعت $K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_v}$

$$\begin{cases} N=0 \rightarrow K_v = 0 \rightarrow e_{ss} = \infty \\ N=1 \rightarrow K_v = K \rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K} \\ N\geq 2 \rightarrow K_v = \infty \rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

$N=1 \rightarrow \quad r(t) = t$

$c(t) = r(t) - \frac{1}{K}$




$\frac{dr(t)}{dt} = 1$

$\frac{dc(t)}{dt} = 1$

سرعت خطا ندارد .

ورودی شتاب (سهمی) :

$r(t) = \frac{t^2}{2} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^3}$

$E(s) = \frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s^3} \rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)}$ ثابت خطای شتاب $K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$

$$\Rightarrow \begin{cases} N=0 \rightarrow K_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty \\ N=1 \rightarrow K_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty \\ N=2 \rightarrow K_a=K \rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K} \\ N\geq 3 \rightarrow K_a=\infty \rightarrow e_{ss}=0 \end{cases} \Leftarrow e_{ss}=\frac{1}{K_a}$$

. نتیجه گیری :

برای تعقیب ورودی شتاب و با خطای حالت ماندگار صفر، باید حداقل ۳ عدد انتگرال گیر در حلقه داشته باشیم

برای تعقیب ورودیهای با تغییر بیشتر و سریعتر، باید تعداد انتگرال گیر بیشتری داشته باشیم.

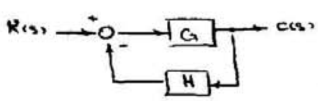
← مزیت انتگرال گیر: کاهش خطا

و اما معایب انتگرال گیر:

۱) تأخیر می دهد. — تأخیر فاز ۱ انتگرال گیر: $\measuredangle \frac{1}{s}=-90^\circ$

۲) باعث ناپایداری می شود. — " " ۲ " ": $\measuredangle \frac{1}{s^2}=-180^\circ$

خطای حالت دائم سیستم با فیدبک غیر واحد:




$E(s) \neq E_a(s)$

$$\frac{E_a(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+GH} \Rightarrow E_a(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot R(s)$$

فرمولهای بخش پیش تنها برای $E_a(s)$ جوابگو خواهند بودند نه $E(s)$ :

$$E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-T(s)\cdot R(s) \Rightarrow$$

$$E(s)=\frac{1+GH-G}{1+GH}\cdot R(s) \qquad (*)$$

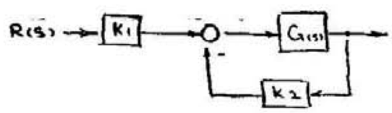
خطای حالت دائم یعنی انتهای سیستم در فرکانس صفر

اگر $H(s)=1$ (شود $G(s)=\frac{1}{1+\tau s}$) ← از رابطه (*) دیده می شود که همان فرمولهای قبلی معتبرند.

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{1+G(0)H(0)-G(0)}{1+G(0)H(0)}=\frac{1}{1+G(0)}$$

← تمام مطالب پیش در مورد انتگرالگیرها ... برقرار است.

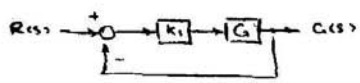
. حالت خاص :




H(s) تنها یک گین است .

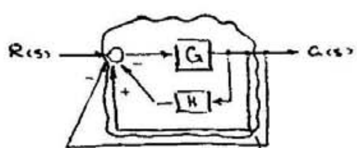
در این صورت به فیدبک واحد تبدیل می‌شود :

$K_1 = K_2 \Rightarrow$

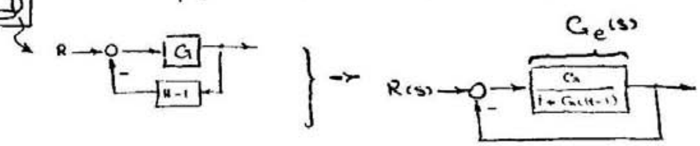



روابط در این فصل معتبر است . $\Rightarrow$

. روش دیگری هم موجود است :



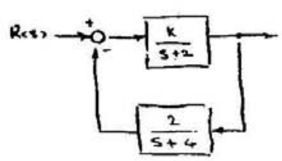

یک فیدبک مثبت و یک فیدبک منفی اضافه می‌کنیم .




$$\Rightarrow G_e(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)(H(s)-1)} \quad \Rightarrow \quad E(s)=E_a(s)=\frac{1}{1+G_e(s)}\cdot R(s)$$

$\Rightarrow$ تمام روابط فصل، با قرار دادن $G_e(s)$ به جای G برقرار است .

. مثال :




Find k s.t $e_{ss}=0$

$R(s)=\frac{1}{s}$

حل : از روش $G_e(s)$ نمی‌رویم. از روش کلاسیک بطور متعارف استفاده می‌کنیم

$$T(s)=\frac{\frac{k}{s+2}}{1+\frac{k}{s+2}\cdot\frac{2}{s+4}}=\frac{k(s+4)}{(s+2)(s+4)+2k}$$

رابطه کلی خطا : $E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-T(s)\cdot R(s)=(1-T(s))\cdot R(s)$

$$E(s)=(1-T(s))\cdot\frac{1}{s} \qquad e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=1-\lim_{s\to 0}T(s)$$

$\Rightarrow$ برای صفر شدن $e_{ss}$ باید $\lim_{s\to 0}T(s)=1$ باشد، یعنی :

$$T(0) = \frac{4K}{8+2K} = 1 \rightarrow K = 4$$

مشاهده میکنید با وجود اینکه انتگرال گیری وجود نداشت و K هم محدود بود باز سیستم توانایی تعقیب ورودی پله را با خطای ماندگار صفر دنبال می کند

* با وجود مشکلات انتگرال گیر، چرا همیشه از روش فوق استفاده نکنیم؟

پاسخ: اگر G را داشته باشیم، یافتن H(s) مناسب انجام پذیر است، که خطای حالت دائم صفر شود، اما مشکل اینجاست که G را دقیقاً نمی شناسیم. (با شناخت دقیق سیستم است که قطبها، صفرها دقیق بدست می آید)

ولی با وجود انتگرال گیر، علیرغم حضور تغییرات سیستم، همچنان خطا صفر خواهد شد. (دیگر H انتگرال گیر، [illegible] است)

* پایداری:

پایداری یکی از مهمترین پارامترهای سیستم کنترل است.

پایداری:
- مطلق: یعنی اینکه پایدار است یا خیر
- نسبی: یعنی سیستم چقدر در نزدیکی مرز پایداری است. یعنی سیستم پایدار چگونه ناپایدار می شود یا سیستم ناپایدار چگونه پایدار می شود

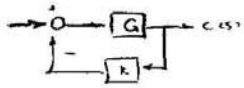
پایداری:
- BIBO: هر ورودی محدود، خروجی محدود نتیجه می دهد.
- Internal Stability (پایداری داخلی): تمام سیگنالهای سیستم باید محدود باشند.

شرط پایداری:
- BIBO: قطبهای سیستم اکیداً سمت چپ محور jω باشند
- داخلی: مقادیر ویژه ماتریس A سمت چپ محور jω باشند.

اگر حذف صفر-قطب سمت راست نداشته باشیم، پایداری داخلی و BIBO معادل یکدیگر هستند.

یعنی: در اینصورت مقادیر ویژه ماتریس A، همان قطبهای سیستم است.

• پایداری BIBO : همه قطبهای سیستم سمت چپ محور $j\omega$ باشد.




$G=\frac{n_p}{d_p}$ $\quad H=\frac{n_h}{d_h}$ $\quad T(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$

$$\rightarrow T(s)=\frac{\frac{n_p}{d_p}}{1+\frac{n_p}{d_p}\cdot\frac{n_h}{d_h}}=\frac{n_p\cdot d_h}{d_p d_h+n_p n_h}$$

$$\Delta(s)=d_p\cdot d_h+n_p n_h=0$$

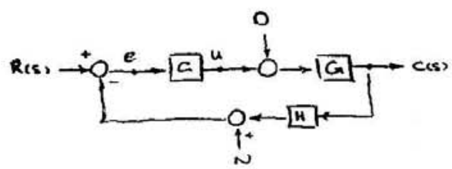
ریشه‌های معادله مشخصه، قطبهای سیستم CL (Closed loop) است.

* شرط پایداری داخلی:

اگر حذف صفر و قطب در RHP (سمت راست صفحه s) در طول حلقه صورت نگرفته باشد ← این دو نوع پایداری یکی هستند.

یعنی باید ریشه‌های $\Delta(s)$ را بررسی کنیم.

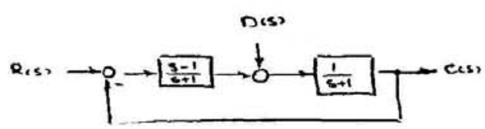
حالت کلی:




• برای پایداری داخلی: (۱) باید حذف صفر و قطب در RHP نداشته باشیم

(۲) ریشه‌های $\Delta(s)$ باید اکیداً سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

* کوییز:



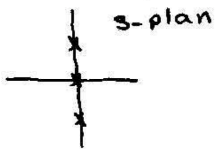

$\frac{C(s)}{R(s)}$ پایدار است $\qquad$ $\frac{C(s)}{D(s)}$ : پایدار نیست

نکته: چون در سیستمهای فیزیکی، اغتشاش (distortion) وجود دارد ← باید پایداری داخلی چک شود.

یعنی حالت حذف صفر و قطب در RHP را به عنوان راه فراری برای اثبات پایداری BIBO استفاده نمی‌کنیم

* پایداری مرزی:

پایداری مرزی یعنی قطبهای ساده روی محور $j\omega$ هستند.

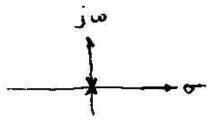



یعنی ناپایداری نمایی وجود ندارد.

یعنی با اندکی تغییر در پارامترها، یا وارد پایداری BIBO می‌شویم یا سیستم ناپایدار می‌شود.

بعضی از ورودی‌های محدود در پایداری مرزی، می‌توانند سیستم را ناپایدار کنند:

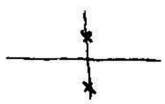
مثال:




$R(s)=\frac{1}{s}$ $\longrightarrow C(s)=\frac{1}{s^2}$ (unbounded)

$G(s)=\frac{1}{s}$ ،

مثال:



$R(s)=\frac{k}{s^2+w^2}$

$G(s)=\frac{w}{w^2+s^2}$

$\longrightarrow C(s)=\frac{kw}{(w^2+s^2)^2} \rightarrow \mathcal{L}^{-1} \rightarrow c(t)=kt\sin wt$

تذکر: اگر قطب تکراری روی محور jω باشد، سیستم ناپایدار است.

این ناپایداری به دلیل نمایی بودن نیست. به دلیل ایجاد عامل t است.

* جلسهٔ چهاردهم : سه‌شنبه : ۸۲/۲/۲

... ادامهٔ مباحث پایداری:

پایداری
- BIBO : ← ریشه‌های معادلهٔ مشخصه، اکیداً سمت چپ ( $\Delta(s)$ )
- Internal : No RHP Pole-Zero Cancellation → $\Delta(s)$ →

در این جلسه می‌خواهیم بدون حل کردن معادلهٔ $\Delta(s)=0$ ، در مورد ریشه‌های آن بحث کنیم:

$$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$$

به شکل فاکتور $r_i$ :

$$i=1,2,\dots,n$$

$$\Delta(s)=(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)$$

$$\Delta(s)=s^n-(r_1+r_2+\dots+r_n)s^{n-1}+(r_1r_2+\dots+r_{n-1}r_n)s^{n-2}+\dots+(-1)^n(r_1r_2\dots r_n)$$

پایداری یعنی : مقادیر حقیقی $r_i$ ها، باید منفی باشد.

شرط لازم (ولی ناکافی) : هر ضرایب $\Delta(s)$ مثبت باشد. $(a_i>0)$ (هر ضرایب متحدالعلامت باشد)
هر ضرایب $\Delta(s)$ باید وجود داشته باشد.

* مثال:

$$\Delta(s)=s^3+s^2+2s+8$$

$$\to \Delta(s)=(s+2)(s^2-s+4)$$

$$=(s+2)\left(s-\left(\frac{-1\pm\sqrt{15}j}{2}\right)\right)$$

شرط لازم را دارد ولی ۲ ریشه سمت راست دارد.

... بررسی شرایط لازم و کافی :

* معیار راث ـ هرویتز:
این روش بر اساس تشکیل یک جدول یا آرایش است.

و درایه‌های این ماتریس بطور مستقیم یا غیرمستقیم از ضرایب $\Delta(s)$ یافته می‌شود:

$$\Delta(s) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_1 S + a_0$$

* آرایه راث:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\vdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 = 1 & & & &
\end{array}$$

- دو سطر اول مستقیماً از $\Delta(s)$ بدست می‌آید.

- سطرهای بعدی از ضرایب دو سطر قبل یافته می‌شود به این صورت:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_3 = \cdots$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_3 = \cdots$$

$\vdots$

بعد از این که سطرهای جدول راث تکمیل شد، داریم:

* شرط لازم و کافی برای آنکه ریشه‌های $\Delta(s)$ همگی سمت چپ محور ساز باشند، آنستکه در ستون تحت جدول تغییر علامتی مشاهده نشود.

* تعداد ریشه‌های سمت راست = تعداد تغییر علامتهای ستون اول آرایه راث است.

هنگام برکردن آرایه‌های جدول راث، سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(۱) جدول روث تشکیل کامل شود (هیچ عنصری در ستون اول صفر نشود)

(۲) یکی از درایه‌های ستون اول صفر شود.

(۳) تمام درایه‌های یک سطر صفر شوند.

اکنون به بررسی این سه حالت می‌پردازیم:

حالت اول: جدول روث ordinary پر شود.

مثال: سیستم درجه ۲:

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

می‌دانیم در سیستم درجه ۲، اگر تمام ضرایب مثبت باشد، سیستم پایدار است.

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_2 > 0 \\ a_1 > 0 \\ a_0 > 0 \end{array}\right\} \text{پایدار}$$

مثال: سیستم درجه ۳:

$$\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2} & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3, a_2, a_1, a_0 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 a_3 \end{array}\right\} \text{شرط پایداری}$$

مثال:

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & \end{array}$$

دو ریشه سمت راست داریم ← ناپایدار است

برای آنکه ریشه در صفر باشد، باید $a_0 = 0$ باشد.

چون معادله اخیر درجه ۳ بود و دو ریشه سمت راست داریم، ریشه‌ای که روی محور موهومی باشد نداریم. (چون اینگونه ریشه‌ها باید مزدوج باشند) ولی در معادله درجه ۳ حداکثر ۳ ریشه داریم).

حالت دوم: یکی از درایه‌های ستون اول، صفر باشد:

- راه حل (۱): عنصر صفر را با $\varepsilon$ جایگزین نموده و محاسبات را ادامه می‌دهیم ($\varepsilon$ عدد مثبت کوچکی می‌باشد). در پایان $\varepsilon$ را به سمت صفر میل می‌دهیم و تغییر علامتها را بررسی می‌کنیم.

- راه حل (۲): در یک فاکتور $(s+\alpha_i)$ که $\alpha_i>0$ ضرب می‌کنیم (غالباً جواب می‌دهد).

مثال:

$$\Delta(s) = s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 2 | 11 |
| $s^4$ | 2 | 4 | 10 |
| $s^3$ | $0^{\to\varepsilon}$ | 6 | 0 |
| $s^2$ | $b_1$ | $b_2$ | |
| $s^1$ | $c_1$ | 0 | |
| $s^0$ | 10 | | |

$$b_1 = \frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon} = 4-\frac{12}{\varepsilon} \simeq -\frac{12}{\varepsilon}$$

$$b_2 = \frac{10\varepsilon-0}{\varepsilon} = 10$$

$$c_1 = \frac{6b_1-10\varepsilon}{b_1} = 6-\frac{10\varepsilon}{b_1} \simeq 6$$

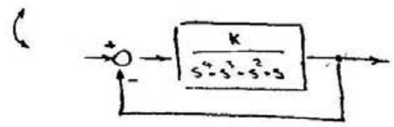
$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_1 = -\frac{12}{\varepsilon} < 0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_1 = 6 > 0$$

$\Leftarrow$ ۲ تغییر علامت دارد $\Leftarrow$ دو ریشه سمت راست دارد.

مثال:

$$\Delta(s) = s^4+s^3+s^2+s+K$$




| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 1 | K |
| $s^3$ | 1 | 1 | 0 |
| $s^2$ | $0^{\to\varepsilon}$ | K | 0 |
| $s^1$ | $\frac{\varepsilon-K}{\varepsilon}$ | 0 | |
| $s^0$ | K | | |

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon - K}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 - \frac{K}{\varepsilon} = \begin{cases} -\infty & ; K>0 \\ +\infty & ; K<0 \end{cases}$$

$K>0 \rightarrow$ دو تغییر علامت و دو ریشه سمت راست.

$K<0 \rightarrow$ یک تغییر علامت و یک ریشه سمت راست.

$K=0 \rightarrow$ $\Delta(s)=0$ یک ریشه در مبداء دارد.

حالت سوم: وقتی همه ضرایب یک سطر صفر شوند:

(۱) یعنی فاکتور مشترک در تقسیمات متوالی وجود دارد. (اصولاً ضرایبی که بدست می‌آیدم از تقسیمات متوالی بدست آمده‌اند).

(۲) نشان‌دهنده ریشه‌های متقارن است.

مثال:

$$\Delta(s) = 2s^4 + 4s^2 + 1$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\Delta_1$ : | $s^4$ | 2 | 4 | 1 |
| $\Delta_2$ : | $s^3$ | 0 | 0 | 0 |
| | $s^2$ | | | |

همانطور که دیده می‌شود، ریشه متقارن خواهد بود.

$\Delta(s) = \Delta_1(s) \cdot \Delta_2(s)$

(۳) معادله کمکی از سطر قبل تشکیل می‌دهیم. (که ریشه‌های آن متقارن است)

هرگز در سطر فرد، صفر نخواهد شد:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 2 | 4 | 1 |
| $s^4$ | 0 | 0 | 0 |

$$\Delta(s) = 2s^5 + 4s^3 + s = s(2s^4 + 4s^2 + 1)$$

(۴) ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند.

(۵) معادله کمکی زوج است.

* در حالت سوم جدول را چگونه ادامه دهیم؟

- از سطر قبل، یک معادله کمکی تشکیل می‌دهیم: $A(s)$ (Auxilary) $\rightarrow$ زوج، ریشه‌های متقارن که ریشه‌های $\Delta(s)$ نیز هست.

- ضرایب مشتق $A(s)$ را به جای سطر کاملاً صفر قرار می‌دهیم: $P(s) = \frac{dA(s)}{ds}$

و جدول را ادامه می‌دهیم.

- الزاماً تعداد تغییر علامتها متناظر با تعداد ریشه‌های سمت راست خواهد بود.

• مثال: محدودهٔ پایداری: $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 4 |
| $s^2$ | 2 | $K$ |
| $s^1$ | $\frac{8-K}{2}$ | 0 |
| $s^0$ | $K$ | |

شرط پایداری: $\left.\begin{matrix} 8-K>0 \\ K>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{0<K<8}_{\text{Range پایداری}}$

به ازای $K=8$ در مرز پایداری هستیم.

اگر $K=8 \Rightarrow$ داریم:

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 4 |
| $s^2$ | 2 | 8 |
| $s^1$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | 8 | |

$\longrightarrow \underbrace{A(s) = 2s^2 + 8}_{\text{معادله کمکی}} \longrightarrow \underbrace{s = \pm 2j}_{\text{ریشه‌های متقارن}}$

$\frac{dA(s)}{ds} = 4s \quad (4) \longrightarrow$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 4 |
| $s^2$ | 2 | 8 |
| $s^1$ | 4 | 0 |
| $s^0$ | 8 | |

چون تغییر علامت نداریم $\Leftarrow$ ریشه سمت راست نداریم.

از طرفی می‌دانیم به ازای $K=8$، ریشه موهومی در سمت چپ قرینه نیست.

پس برای اینکه متقارن باشد، همه ریشه‌ها روی محور $j\omega$ هستند.

• مثال:

$s^9$ } بقیه ریشه‌های $\Delta(s)$ را مشخص می‌کند

$A(s) \longrightarrow s^8$

تغییر علامت از اینجا به بعد، ریشه‌های $A(s)$ را مشخص می‌کند } $s^7, s^6, \ldots$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^9$ | | | | |
| $s^8$ | | | | |
| $s^7$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $s^6$ | | | | |
| $\vdots$ | | | | |

$\sim\!\!\rightarrow$

| | |
|---|---|
| $s^9$ | 2 |
| $s^8$ | 1 |
| $s^7$ | 2 |
| | -3 |
| $\vdots$ | 3 |
| | $\vdots$ |
| $s^0$ | 3 |

توضیحات :

چون ۲ تغییر علامت داریم ← ۲ ریشه سمت راست داریم.

به علت تقارن ریشه‌ها، دو ریشه هم در سمت چپ باید داشته باشیم

چون مجموعاً 8 ریشه مربوط به A(s) است ← ۴ ریشه هم بر روی محور $j\omega$ خواهیم داشت.

در کل سیستم 9 ریشه دارد، ۱ ریشه باقیمانده مربوط به B(s) است که سمت چپ است.

(البته توجه کنید که از $S^9$ به $S^8$ تغییر علامت نداشته‌ایم)

نتیجه‌گیری: اطلاعاتی که به دست می‌آوریم :

۱) تعداد ریشه‌های سمت راست

۲) تعداد ریشه‌های سمت چپ

۳) تعداد ریشه‌های روی محور $j\omega$

تذکر و یادآوری : اگر تعداد ریشه‌های سمت راست صفر باشد ولی روی $j\omega$ ریشه داشته باشیم، یا ناپایدار است و یا پایدار مرزی : که بستگی به تکراری بودن یا نبودن ریشه‌های روی محور $j\omega$ دارد.

اگر تکراری باشد، ناپایدار است و اگر ساده باشد، پایدار مرزی خواهد بود.

* جلسه پانزدهم: یکشنبه: ۸۲/۲/۷

* مثال:

$A(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 8 | 7 |
| $s^4$ | 4 | 8 | 4 |
| $s^3$ | 6 | 6 | 0 |
| $s^2$ | 4 | 4 | 0 |
| $s^1$ | $0 \xrightarrow{\varepsilon} 8$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | 4 | | |

1d

$A(s) = 4s^2 + 4 \Rightarrow s = \pm j$

$P(s) = \frac{dA(s)}{ds} = 8s$

چون در کل جدول تغییر علامت نداریم و غیر از دو ریشه $A(s)$ که بر روی محور $j\omega$ قرار دارد، بقیه ریشه‌ها سمت چپ است

این سیستم در مرز پایداری است

* مثال:

$A(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 4 | 3 |
| $s^4$ | 1 | 24 | 63 |
| $s^3$ | -20 | -60 | 0 |
| $s^2$ | 21 | 63 | 0 |
| $s^1$ | $\cancel{0} \xrightarrow{\varepsilon} 42$ | 0 | 0 |
| $s^0$ | 63 | | |

$A(s) = 21s^2 + 63 \Rightarrow s = \pm\sqrt{3}\,j$

$P(s) = A'(s) = 42s$

این سیستم دو ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

دو ریشه متقارن روی محور $j\omega$ دارد. و باقیمانده ریشه‌ها سمت چپ خواهد بود.

$$\begin{cases} 2 : RHP \\ 2 : j\omega \\ 1 : LHP \end{cases}$$

* مثال: دو ریشه‌ی تکراری روی محور $j\omega$:

$A(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 2 | 1 |
| $s^4$ | 1 | 2 | 1 |
| $s^3$ | $\cancel{0}\ 4$ | $\cancel{0}\ 4$ | 0 |
| $s^2$ | 1 | 1 | |
| $s^1$ | $\cancel{0}\ 2$ | 0 | |
| $s^0$ | 1 | | |

$A_1(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2+1)^2$

$P_1(s) = 4s^3 + 4s = 2s\underbrace{(s^2+1)}_{\text{چند جمله‌ای متقارن}}$

$A_2(s) = s^2 + 1 \qquad P_2(s) = 2s$

* وقتیکه ریشه تکراری روی محور ها داشته باشیم بیش از یک سطر صفر خواهد شد. به هر تعداد ریشه تکرار داشته باشیم، به همان تعداد سطر صفر خواهیم داشت.

سیستم مثال اخیر ناپایدار است (نه پایدار مرزی) چون روی محور $j\omega$ ریشه تکراری دارد.

* مثال: (موتور DC)

- حذف قطبهای غیر مسلط:

ثابت زمانی الکتریکی

$$\begin{cases} \tau_a = 0.0003\ S & L_a = 0.003\ H \\ \tau_m = 0.01333\ S & \end{cases}$$

ثابت زمانی مکانیکی

$$G(s) = \frac{4500K}{S(S+361.2)} \Rightarrow T = \frac{G}{1+G}$$

$$T = \frac{4500K}{S^2+361.2S+4500K} \qquad A(s) = S^2+361.2S+4500K$$

این سیستم ساده شده به ازای هر K پایدار است،

اما نمی توان گفت سیستم واقعی هم با این شرط پایدار است چون درجه ۳ خواهد بود:

$$G(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)} \Rightarrow T(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)+1.5\times10^7 K}$$

$$A(s) = S^3+3408.3\,S^2+1{,}204{,}000S+1.5\times10^7 K$$

| | | |
|---|---|---|
| $S^3$ | 1 | 1204000 |
| $S^2$ | 3408.3 | $1.5\times10^7 K$ |
| $S^1$ | $b_1$ | 0 |
| $S^0$ | $1.5\times10^7 K$ | |

$$b_1 = \frac{3408.3\times1204000-1.5\times10^7 K}{3408.3}$$

شرط پایداری:

$$K>0 \qquad b_1>0 \Rightarrow K < \frac{3408.3\times1204000}{1.5\times10^7}$$

$$\Rightarrow 0<K<273.57$$

← پس حذف قطب غیر مسلط ما را به تغییر زیادی در حدود پایداری سیستم واقعی نمی رساند.

* پایداری نسبی: فاصله ریشه‌ها تا محور jω چقدر است؟

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

معیار راث تعداد ریشه‌های سمت چپ jω را به ما می‌دهد.

حال اگر محور jω را به سمت چپ شیفت بدهیم (مثلاً روی خط $\sigma = k$) و معیار راث را پیاده کنیم، تعداد ریشه‌های سمت چپ و راست این خط جدید یافته می‌شود.

$S_n = S + \alpha \qquad \alpha > 0$

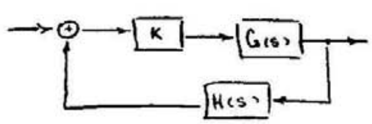
• معیار راث را اندیابی می‌کنیم:

- اگر تعداد تغییر علامت داشت، ← ریشه‌ها سمت راست α هستند ← α را کوچکتر می‌کنیم
- اگر تغییر علامت نداشت ← ریشه‌ها سمت چپ α هستند ← α را بزرگتر می‌کنیم.
- ریشه‌ها روی خط α قرار گیرد.

* مکان هندسی ریشه‌ها: فصل ۷:

هدف: بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه در اثر پارامتر خاص روی پایداری

بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (که لزوماً K نیست)




$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KGH(s)}$$

$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0 \quad \rightarrow \quad KGH(s) = -1$

شرط اندازه

$$\begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \measuredangle GH(s) = \pm 180(2q+1) \quad , \quad q = 0, 1, \cdots \end{cases}$$

شرط زاویه

که مضارب فرد $180^\circ$

مکان هندسی یعنی تغییر ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای تغییرات $K$

اگر نقطه $s^*$ در $GH(s)$ قرار داده شود و فاز $\measuredangle GH(s^*)$ مضارب فرد 180 باشد

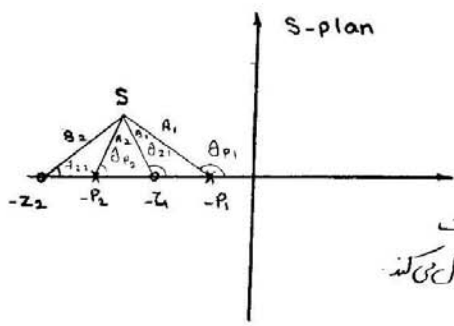
این به ازاء یک $K$ خاص خود ریشه‌ای معادله مشخصه خواهد بود. به ازای چه $K$ی؟ $K$یی که شرط اندازه را تحقق کند.

$$GH(s) = \frac{(s+Z_1)(s+Z_2)\cdots(s+Z_m)}{(s+P_1)(s+P_2)\cdots(s+P_n)}$$

برای سیستمهای فیزیکی $n \geq m$

برای حالت $m > n$ حداقل یک قطب در بی‌نهایت خواهیم داشت.

- دیاگرام قطب × و صفر ○ در صفحه S :



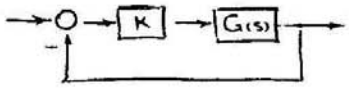

$$\begin{cases} S + Z_i = (S - (-Z_i)) \\ S + P_i \end{cases}$$

نشان‌دهنده بردارهایی است که $Z_i$ (یا $P_i$) را به S وصل می‌کند.

$$\measuredangle GH(s) = \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s+Z_i) - \sum_{i=1}^{n} \measuredangle (s+P_i)$$

$$\begin{cases} \measuredangle GH(s) = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) \\ |GH(s)| = \dfrac{B_1 B_2}{A_1 A_2} \end{cases}$$

* مثال :



$$A(s) = 1 + K\,G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

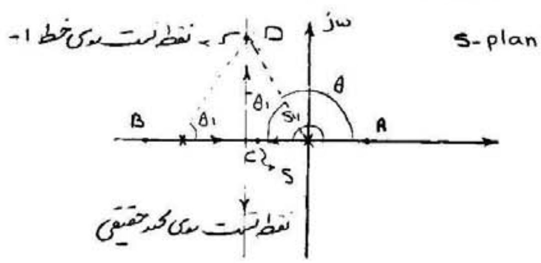
$$A(s) = 0 \rightarrow s(s+2) + K = 0 \rightarrow s^2 + 2s + K = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

$$\begin{cases} s_1 = -1 + \sqrt{1-K} \\ s_2 = -1 - \sqrt{1-K} \end{cases} \qquad K = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

$0 < K < 1 \rightarrow$ $s_1$ منفی‌تر ، $s_2$ مثبت‌تر

$$K = 1 \rightarrow s_1 = s_2 = -1$$

$K > 1 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K-1} \rightarrow$ اندازه ثابت و فاز تغییر می‌کند




$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

نقاط حقیقی: نقاط روی محور حقیقی بین ۰ و ۲-

نقطه C $\left\{ \begin{array}{l} \angle s_1 = 180 \\ \angle s_2 = 0 \end{array} \right.$ $\rightarrow \angle GH(s) = -(\angle s_1 + \angle s_2) = -180$

S ← جزء مکان هست.

نقطه D $\left\{ \begin{array}{l} \theta = 180 - \theta_1 \\ \angle GH = -(180 - \theta_1 + \theta_1) = -180 \rightarrow \end{array} \right.$

شرط زاویه ارضا می‌شود ← جزء مکان هست.

نقطه A : $\angle GH = 0$

نقطه B : $\angle GH = -360$

← شرط زاویه ارضا نمی‌شود ← جزء مکان نیستند.

* مراحل یافتن: (1) تابع تبدیل حلقه باز را بصورت فاکتورگیری شده می‌نویسیم.

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

۲) دیاگرام قطب، صفر تابع تبدیل حلقه باز را رسم می‌کنیم.

تعداد شاخه‌های مکان:

شاخه یعنی مسیری که یک قطب با تغییرات پارامتر طی می‌کند ($0 < K < \infty$) که برابر n می‌باشد.
(تعداد قطبهای سیستم حلقه باز)

۳) تقارن نسبت به محور حقیقی:

مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.
چون اگر ریشه مختلط، زوج آن نیز خود مکان است.

۴) نقطه شروع و انتها:

ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازاء $K=0$ کجا هستند؟ با قطبهای $GH(s)$ برابر هستند.

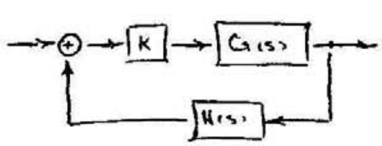
ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای $K=\infty$ کجا هستند؟ با صفرهای $GH(s)$ برابر هستند.

$$GH(s) = \frac{N_{gh}}{D_{gh}}$$

$$1 + KGH(s) = 0 \Rightarrow K = \frac{-1}{GH(s)} \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow GH(s)=\infty \sim \text{قطبهای } GH(s) \\ K=\infty \Rightarrow GH(s)=0 \sim \text{صفرهای } GH(s) \end{cases}$$

اگر K به سمت صفر میل کند (بسیار کوچک باشد):

سیستم حلقه باز و حلقه بسته مانند هم عمل می‌کنند.



* جلسه شانزدهم :          سه شنبه : ۸۲,۲,۹

* مکان هندسی ریشه ها :

بررسی رفتار سیستم حلقه بسته با تغییرات یک یا چند پارامتر خاص

رفتار سیستم توسط قطبها مشخص می شود و قطبها ریشه های معادله مشخصه هستند .

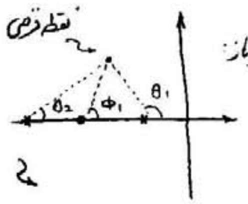
« هدف ما یافتن رفتار سیستم حلقه بسته از روی مشخصات سیستم حلقه باز است ، بدون حل معادله مشخصه .

( به یاد داشتن تابع تبدیل سیستم حلقه باز و داشتن صفرها و قطبهای آن ))

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{a_{n-1}s^{n-1}}{s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$0 < K < \infty$ $\qquad KGH(s) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle KGH(s) = (2q+1)180^\circ, \quad q = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$




نمودار قطب صفر سیستم حلقه باز :
$GH(s)$

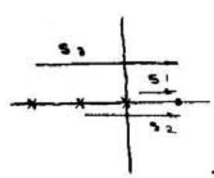
$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

$$\angle GH(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

- ترسیم دیاگرام صفر و قطب
- تعداد شاخه ها : $n$
- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها : $K = 0 \qquad K = \infty$

- نقاط روی محور حقیقی عضو مکان :

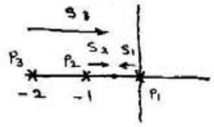
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$




$\angle s_1 = \angle s_2 + \angle s_3 = 0 \rightarrow$

$\angle GH(s) = 0 \rightarrow$ شرط زاویه ارضا نمی شود

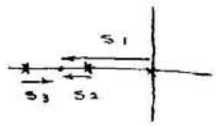
→ نقاط سمت راست همگی حذف می‌شوند و جزء مکان هستند



$\measuredangle S_1 = 180$

$\measuredangle S_2 = \measuredangle S_3 = 0$ $\rightarrow \measuredangle GH(s) = -180 \rightarrow OK \rightarrow$

نقاط میان $P_1$ و $P_2$ عضو مکان نیستند.



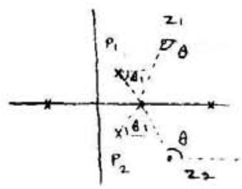
$\measuredangle GH(s) = -(180+180+0) = -360^\circ \rightarrow Cancel \rightarrow$

نقاط میان $P_2$ و $P_3$ عضو مکان هستند.

$\measuredangle GH(s) = -(3\times180) = -540^\circ \rightarrow OK \rightarrow$

نقاط سمت چپ $P_3$ جزو مکان هستند.

نتیجه‌گیری: نقاط سمت چپ تعداد فرد صفر و قطب روی محور حقیقی جزو مکان هستند.



تاکنون قطبهای مختلط را بررسی نکردیم:

$\measuredangle Z_1 = 360 - \theta$

$\measuredangle Z_2 = \theta$ $\rightarrow \measuredangle Z_1 + \measuredangle Z_2 = 360^\circ \rightarrow$ تأثیری روی فاز ندارد.

$\measuredangle P_1 = 360 - \theta_1$

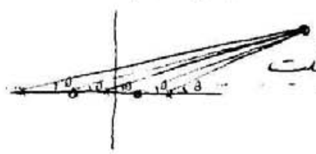
$\measuredangle P_2 = \theta_1$ $\rightarrow \measuredangle P_1 + \measuredangle P_2 = 360^\circ \rightarrow$ تأثیری در فاز ندارد

→ قطب و صفرهای مختلط تأثیری تاکنون [illegible] ندارند.

رفتار در بینهایت: (مجانبها):

مکان از قطبهای سیستم حلقه باز شروع می‌شود و به صفرهای سیستم حلقه باز ختم می‌شود.

$$GH(s) = \frac{1}{S^3 + 3S^2 + 2S} \longrightarrow S \to \infty \rightarrow GH(s) \simeq \frac{1}{S^3}$$



در بینهایت

$(m-n)\theta = (2q+1)180^\circ \rightarrow \theta = \frac{2q+1}{m-n} \cdot 180^\circ$

تعداد صفرها

تعداد قطبها

اکنون باید دنبال خطوطی بگردیم که ریشه‌ها در $S \to \infty$ روی این خط قرار می‌گیرند. (خطوط مجانب)

$$GH(s)=\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0}$$

$$\Delta(s)=1+K\cdot\frac{s^m+\dots+b_0}{s^n+\dots+a_0}\quad(I)\Rightarrow$$ تقریب در نهایت : $\Delta(s)\cong 1+K\cdot\frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}}$

$$\Delta(s)=1+\frac{K}{(s-\sigma)^{n-m}}=0\Rightarrow\quad(II)$$

(۱) نشان می‌دهیم، s هایی که رابطهٔ (II) را ارضاء می‌کنند روی یک خط قرار دارند.

(۲) نشان می‌دهیم چگونه در $s\to\infty$ ، رابطه II از رابطه I بدست می‌آید.

بررسی (۱) :

$$1+\frac{K}{(s-\sigma_0)^N}=0\leftarrow\quad n-m=N$$

$$\Rightarrow\frac{K}{(s-\sigma_0)^N}=-1\Rightarrow(s-\sigma_0)^N=-K\Rightarrow s-\sigma_0=(-K)^{1/N}$$

$$-1=e^{j\pi}\Rightarrow(-1)^N=e^{j\pi N}\qquad\Rightarrow s-\sigma_0=(+K)^{1/N}\cdot e^{j\cdot\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$s=\sigma+j\omega\Rightarrow\qquad\sigma+j\omega-\sigma_0=(K)^{1/N}\cdot e^{j\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma-\sigma_0=|K|^{1/N}\cos\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (III)\\ \omega=|K|^{1/N}\cdot\sin\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (IV)\end{cases}$$

الذن رابطهٔ III را بر IV تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{\omega}{\sigma-\sigma_0}=\underbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right)}_{m}$$

$$\Rightarrow\omega=m(\sigma-\sigma_0)$$

⇐ قسمت حقیقی و موهومی همهٔ s هایی که رابطه II را ارضاء می‌کنند، روی خط با شیب m و در $\sigma_0$ قرار می‌گیرند.

$$\Rightarrow\begin{cases}\phi=\frac{(2q+1)\pi}{n-m} & ,\ q=0,1,\dots\\ \sigma_0=?\end{cases}$$

بررسی (۲) :

الذن می‌خواهیم $\sigma_0$ را بیابیم :

می دانیم: $b_{n-1} = \sum$ همه صفرها $\qquad a_{n-1} = \sum$ همه قطبها

صورت و مخرج رابطه (I) را بر $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ تقسیم می کنیم ⇐

$$\Delta = 1 + \frac{K}{\dfrac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}} \xrightarrow{\text{درنظرگرفتن دو جمله نخست}} \Delta = 1 + \frac{K}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (V)$$

الان تقسیم معادله II را نیز با درنظرگرفتن دو جمله انجام می دهیم:

$$1 + \frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}} = 0 \to 1 + \frac{K}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_0 s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (VI)$$

با مساوی قرار دادن روابط V و VI داریم:

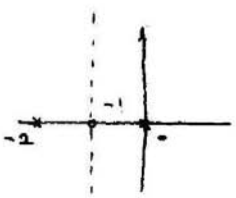
$$-(n-m)\sigma_0 = a_{n-1} - b_{m-1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$$

زاویه مجانب ها ← $\Phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \quad ; q = 0, 1, 2 \dots$

مرکز مجانب ها ← $\sigma_A = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$

* مثال:

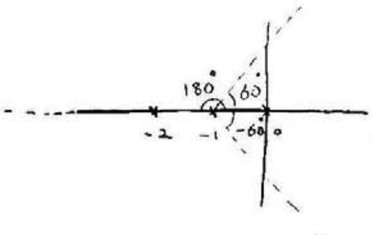


$\sigma_A = -2 - 0 - (-1) = -1$

$n = 2$
$m = 1 \to n - m = 1$

* مثال:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$n = 3$
$m = 0 \to n - m = 3 \Rightarrow \Phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \times 180^\circ \Rightarrow \Phi_A = \begin{cases} 60 & : q = 0 \\ 180 & : q = 1 \\ -60 & : q = 2 \end{cases}$

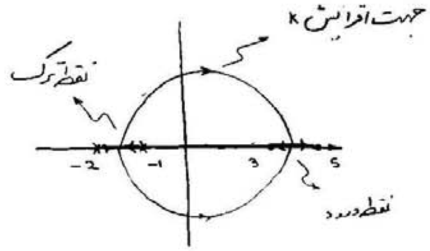
$$\sigma_A = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} = \frac{(-1-2-0)-0}{3} = -1$$

. نقاط ترک و ورود به محور حقیقی :

مثال:

$$GH(s) = \frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

مکان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم می گردد.




مجانب نداریم $\begin{matrix} n=2 \\ m=2 \end{matrix} \rightarrow n-m=0 \rightarrow$

سپس نقاط روی محور حقیقی را مشخص می کنیم

الان می خواهیم نقاط ترک و ورود را بیابیم :

تذکر : در نقاط ترک یا ورود ، ریشه های مکرر داریم ، بسته به اینکه چند شاخه به هم رسیده باشد.

$\Rightarrow$ میان نقاط 1- و 2- ، در نقطهٔ ترک $\sigma_1$ ، K بیشترین مقدار خود را دارد.

مکان از بینهایت به سمت صفرها می رود ، و در صفر از قطبها شروع می شود

بین نقاط 3 و 5 ، K مقدار مینیمم خود را دارد.

به کمک مفاهیم فوق :

راه نخست : روش عددی: ارزیابی K در نقاط مختلف.

$$\left.\frac{dK}{ds}\right| = 0$$

نقاط ترک یا ورود

راه دوم : مشتق گیری:

$$\Delta = 1 + KGH(s) = 0 \rightarrow K = \frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds} = 0$$

$$\rightarrow S_{B.in} , S_{B.away} : OK$$

اگر این نقاط یافته شده روی مکان بودند $\leftarrow$ نقاط ترک و ورود هستند.

برای مختلط ها : $K = \frac{-1}{GH(s)}$ قرار می دهیم. اگر حقیقی بود حتما ترک یا ورود است.

راه سوم: از اینکه ریشه در نقاط ترک یا ورود تکرار است، نتیجه می‌گیریم:

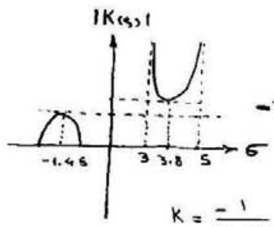
ریشه تکرار یعنی: $\Delta(s_0)=0$ و $\dfrac{d\Delta(s_0)}{ds}=0$

اثبات: در نقاط ترک یا ورود:

$$\frac{dKGH(s)}{ds}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds}=\frac{\frac{dGH(s)}{ds}}{(GH(s))^2}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

بازمی‌گردیم به حل مثال:




ـ تعداد قطبهای سمت راست از قطبهای سمت چپ باید بیشتر باشد.

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \qquad s\in[-2 , -1] \rightarrow$$

• روش نخست: عددی

| $\sigma$ | K | | $\sigma$ | K | |
|---|---|---|---|---|---|
| -1.41 | 0.008557 | | 3.3 | 44.686 | |
| -1.42 | 0.008585 | | 3.4 | 37.125 | |
| -1.45 | 0.008623 | → Max | 3.8 | 29 | → Min |
| -1.46 | 0.008622 | | 3.9 | 2.200 | |

• روش دوم:

$$K=\frac{-1}{GH(s)}=\frac{-(s+2)(s+1)}{(s-3)(s-5)}$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+2}{s^2-8s+15}\right)=0 \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} s_1=-1.45 \\ s_2=3.82 \end{cases}$$

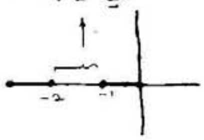
* مثال:

$$K=-(s^3+3s^2+2s)$$

$$\frac{dK}{ds}=0 \rightarrow 3s^2+6s+2=0 \rightarrow s_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تذکر مهم: $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان نیست. چون:

این ناحیه خود مکان نیست.



$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ خود مکان نیست ← نقطه ترک هم نیست.

ولی نقطه $-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ خود مکان می باشد.

$$\sigma_b = -1+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

**• نقطه قطع محور $j\omega$:**

چرا باید بدانیم که مکان محور $j\omega$ را قطع می کند یا خیر؟

پاسخ: چون محور $j\omega$ مرز پایداری است و باید بدانیم مکان به ازای چه $K$ هایی پایدار است.

برای تشخیص آنکه مکان هندسی محور $j\omega$ را قطع می کند، یک راه این است که بجای $s$، مقدار $j\omega$ قرار دهیم:

$$\Delta(s)\Big|_{s=j\omega} = Re(\omega)+j\,Im(\omega) = 0 \rightarrow \begin{cases} Re(\omega)=0 \\ Im(\omega)=0 \end{cases}$$

روش دیگر: معیار راث: اگر سطر صفر داشت، احتمال قطع می باشد که هم $\omega$ و هم $K$ داده می شود.

• جلسه نهم: یکشنبه: ۲۴/۲/۸۲

... ادامه مباحث مکان هندسی ریشه ها:

• تغییرات قطبهای سیستم حلقه بسته نسبت به یک پارامتر ($K>0$):

$$\Delta(s) = 1+KGH(s) = 0$$

$$\begin{cases} \text{شرط اندازه}: |KGH(s)|=1 \\ \text{شرط زاویه}: \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \end{cases}$$

$$q=0,\pm1,\pm2,\dots$$

- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها
- رفتار در بینهایت
- نقاط ترک و ورود
- نقاط قطع محور $j\omega$
- نقاط روی محور حقیقی در مکان

بررسی نقاط قطع روی محور $j\omega$ :

دو راه داریم: (۱) $s=j\omega \leftarrow \Delta(j\omega)=0 \leftarrow$

$$\Delta(j\omega)=Real(\omega)+j\,Im(\omega)$$

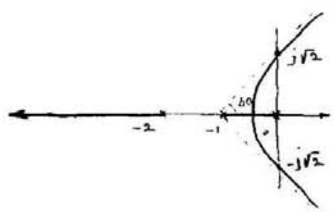
$$Re(\omega)=0$$

(۲) معیار راث :

یک سطر صفر (نشان دهنده دو ریشه متقارن) ← احتمال اینکه ریشه روی $j\omega$ باشد وجود دارد

* مثال :

$$GH(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$




اولین گام: رسم دیاگرام صفر و قطب :

$$\left.\begin{matrix} n=3 \\ m=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \Phi_A=\frac{2q+1}{n-m}\cdot 180 \rightarrow \begin{cases} 60 \\ -60 \\ 180 \end{cases}$$

$$\sigma_A=\frac{\text{مجموع صفرها} - \text{مجموع قطبها}}{n-m}=-1$$

$$\frac{dGH(s)}{ds}=0 \cdot \frac{dK}{ds}=0 \rightarrow s=\begin{cases} -0.57 & ; OK \\ -1.57 \rightarrow & \text{چون جزء نقاط مکان نمی‌باشد} \end{cases}$$

$$\Delta(s)=1+KGH(s)=0 \rightarrow$$

$$s(s+1)(s+2)+K=0 \rightarrow s^3+3s^2+2s+K=0 \rightarrow$$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | 1 | 2 |
| $s^2$ | 3 | $K$ |
| $s^1$ | $\frac{6-K}{3}$ | 0 |
| $s^0$ | $K$ | |

← تنها سطری که ممکن است صفر شود ($s^1$)

به ازای $K=6$ صفر می شود: ← معادله کمکی: $3s^2+6=0 \to$

$3(s^2+2)=0 \to s=\pm j\sqrt{2} \to$ محل قطع مکان با محور j

روش دوم:

$$Re(\omega)+jIm(\omega)=0 \qquad \Delta(s)\Big|_{s=j\omega}=0$$

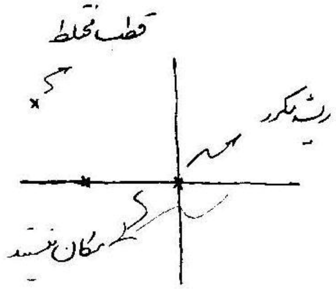
$$\to (j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0 \to$$

$$-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K=0 \to$$

$$\underbrace{(K-3\omega^2)}_{Re(\omega)}+j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im(\omega)}=0 \to Im(\omega)=0 \to 2\omega-\omega^3=0 \to \begin{cases}\omega=0\\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} Re(\omega)=0 \to K-3\omega^2 \to K=3\omega^2 \\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{array}\right\} \to K=6$$

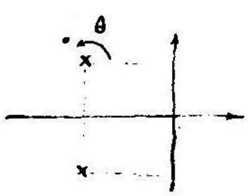
* زاویه خروج از قطب (مختلط) یا زاویه ورود به صفر (مختلط):




مثال: $G(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

- یک نقطه در همسایگی قطب مورد نظر انتخاب می کنیم.

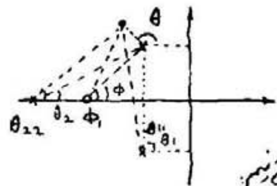
- زاویه این نقطه با قطب مورد نظر را $\theta$ می نامیم ($\theta$ مجهول است)




- این نقطه اگر جزء مکان باشد باید شرط زاویه برای آن محقق شود

جلسهٔ هجدهم :                                                    سه‌شنبه : ۱۶/۲/۸۲

... زاویه خروج (ورود) از (به) قطب (صفر) :




زاویه‌ی تست با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم مجهول فرض می‌کنیم :

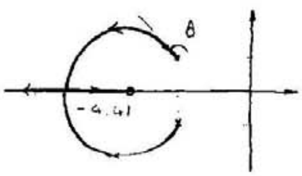
زاویه‌ی بقیه صفر و قطبهای GH(s) با نقطه‌ی تست را با زاویه‌ی قطب (صفر) مسأله تقریب می‌زنیم:

$$\left.\begin{aligned} &\phi_1 - \theta_{11} - \theta_{22} - \theta = 180 \\ &\phi_1 \simeq \phi \quad \theta_{11} \simeq \theta_1 \quad \theta_{22} \simeq \theta_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

θ بدست می‌آید

مثال :

$$GH(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+5} \longrightarrow \begin{cases} z = -3 \\ p_1, p_2 = -2 \pm j1 \end{cases}$$




گام (۱) : رسم دیاگرام صفر-قطب

گام (۲) : یافتن نقاط حقیقی محور

گام (۳) : مجانبها (تعداد، زاویه، مرکز مجانبها) :

- تعداد : $n - m = 1$

- زاویه : $\phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \cdot \pi , \quad q = 0, 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \phi_A = +180^\circ$

- مرکز : $\sigma_A = \frac{\sum \text{قطب} - \sum \text{صفر}}{n - m} = -1$

گام (۴) : نقاط ترک و ورود به محور حقیقی :

$$\frac{dK}{ds} = 0 , \quad \frac{dGH(s)}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{1}{GH(s)} = -\left[\frac{s^2+4s+5}{s+3}\right]$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{(2s+4)(s+3) - (s^2+4s+5)(1)}{(s+3)^2} = 0$$

$$\rightarrow (2s^2+10s+12)-(s^2+4s+5)=0 \rightsquigarrow s^2+6s+7=0 \rightarrow s=-3\pm\sqrt{9-7} \rightarrow$$

$$s=-3\pm\sqrt{2} \rightarrow s=\begin{cases} -3-\sqrt{2} \sim \text{جزو مکان، مثبت} \\ -3+\sqrt{2} \sim \text{جزو مکان نیست} \end{cases}$$

$$-3-\sqrt{2}=4.41$$

$$K=\frac{-1}{GH(-4.41)}=4.84$$

گام نهایی: یافتن زاویه خروج:

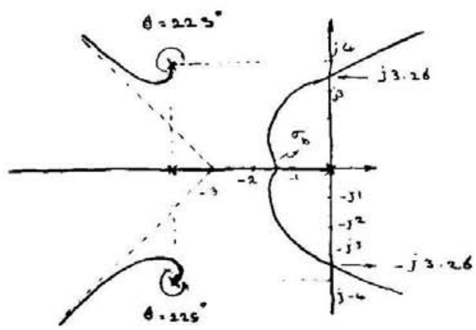
$$\phi-\theta_1-\theta=180 \rightarrow \underbrace{-90}_{\theta_1}+\underbrace{45}_{\phi}-\theta=180 \rightarrow \theta=-225^\circ=135^\circ$$

یادآوری: مکان مثبت محور حقیقی متقارن است.

* مثال:

$$GH(s)=\frac{1}{s^4+12s^3+64s^2+128s}$$

رسم دیاگرام صفر و قطب:




$P_1=0$

$P_2=-4$

$P_3=-4+j4$

$P_4=-4-j4$

نقاط روی محور حقیقی: OK

مجانب ها:

(a) تعداد:

تعداد مجانبها برابر اختلاف درجه صورت و مخرج است که 4 مجانب دارد.

توضیح دیگر: این سیستم 4 صفر در بینهایت دارد. مکان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم میشود که 4 مجانب دارد.

- زوایا :

$$\Phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\cdot\pi \longrightarrow \Phi_A = \frac{2q+1}{4}\cdot 180 \longrightarrow \Phi_A = \begin{cases} 45 \\ -45 \\ 135 \\ -135 \end{cases}$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

- مرکز مجانب :

$$\sigma_A = \frac{\sum P - \sum Z}{n-m} = \frac{(0-4-4-4)-0}{4} = -3$$

* تذکر: برای آنکه بفهمیم مکان از پایین به مجانب نزدیک می‌شود یا از بالا، باید نقطه قطع محورها را بیابیم؛

- نقطه ترک محور حقیقی :

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dK}{ds} = 0 \qquad K = \frac{-1}{GH(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 36s^2 + 128s + 128) = 0$$

چون ماشین حساب نداریم (!) ⟸ باید از روش عددی کمک بگیریم ؛

می‌خواهیم $\frac{dK}{ds} = 0$ باشد ⟸ $K(s)$ باید ماکسیمم باشد : ⟸ به تابع $K(s) = \frac{-1}{GH(s)}$ عدد می‌دهیم .

| $s$ | 0 | -1 | -1.5 | -2 | -2.5 | -3 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 0 | 75 | 85 | 80 | 68.5 | 51 | 0 |

$$\underbrace{\phantom{85}}_{\text{Max}} \rightarrow \begin{cases} \sigma_b = -1.5 \\ K_b = 85 \end{cases} \quad b: \text{Brake Away (!?)}$$

- نقطه قطع محور $j\omega$ :

(1) معیار راث

(2) از رابطه $\Delta(s)$ در $s = j\omega$

$$\Delta(s) = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | 64 | K |
| $s^3$ | 12 | 128 | 0 |
| $s^2$ | $b_1$ | K | |
| $s^1$ | $c_1$ | 0 | |
| $s^0$ | K | | |

$$b_1 = \frac{12\times 64 - 128}{12} = 53.33$$

$$c_1 = \frac{128 b_1 - 12K}{b_1}$$

سطر فرد، باید صفر باشد :

$$c_1 = 0 \rightarrow K = \frac{53.33\times 128}{12} = 568.85$$

برای K بدست آمده اخیر، سیستم در مرز پایداری خواهد بود.

معادله کمکی

$$\to A(s) = 53.33\, s^2 + 568.85 = 0$$

$$\to s = \pm j\sqrt{\frac{568.85}{53.33}} \to s_{1,2} = \pm j\, 3.26$$

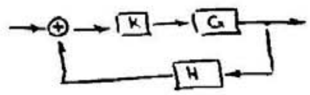
نقط تقاطع با محور jω

- زاویه خروج از قطب مختلط:

$$-135 - 90 - 90 - \theta = 180 \to$$

$$\theta = -135^\circ - 360^\circ = -135^\circ \to ۲۲$$

کوییز: برای فیدبک مثبت، قوانین مکان چگونه اصلاح می‌شود؟



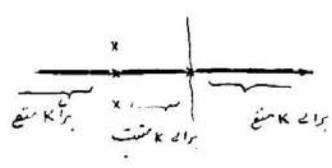

تذکر: فیدبک مثبت با K مثبت = فیدبک منفی با K منفی

- قوانین اصلاح شده برای فیدبک مثبت:

$$KGH(s) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

(1) تقارن نسبت به محور حقیقی برقرار است

(2) نقاط روی محور حقیقی: سمت چپ تعداد زوج صفر و قطب




نتیجه: اگر K را در بازه $(-\infty, +\infty)$ درنظر بگیریم ← کل محور حقیقی جزء مکان خواهد بود.

(۳) نقطه ترک محور حقیقی، تعادل نمی کند (چون ارتباطی با زاویه ندارد)

(۴) مجانبها: - تعداد: قانون آن تعادل نمی کند.

- مرکز: عوض نمی شود.

- زاویه: عوض می شود: $\Phi_A = \frac{2q\pi}{n-m}$ ، $q=0,1,\dots$

(۵) زاویه ورود و خروج: تغییر می کند: برای مضارب زوج $180^\circ$ نوشته می شود: $2q\pi$ :

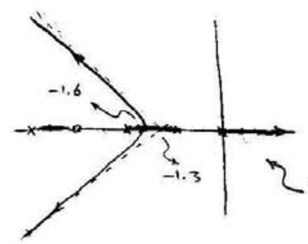
(۶) نقطه قطع محور موهومی: قانون تغییر نمی کند: معیار روث یا برابر $\Delta(s)$ به ازای $s=j\omega$ صفر

* مثال: با فرض فیدبک مثبت:

$$GH(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\begin{cases} z=-3 \\ P_1=0 \\ P_2=-1 \\ P_3=-2 \\ P_4=-4 \end{cases}$$

- رسم دیاگرام مکان ریشه:




فیدبک مثبت، ذاتاً ناپایدار است

مجانبها: - اختلاف درجه صورت و مخرج: ۳

- $\Phi_A = \frac{2K}{3} \cdot 180 \Rightarrow 0, 120, -120$

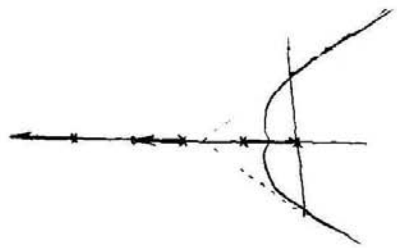
- $\sigma_A = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{n-m} = \frac{-4}{3} = -1.3$

- تذکر: در سیستم های درجه پایین عموماً، مجانبها وسط مکان قطع نمی شوند.

- نقطه ترک:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \sigma_b = -1.6$$

* تذکر: اگر فیدبک منفی (و تیر $K<0$) بود، مکان بصورت زیر در می آید:



Matlab Code: Rlocus(n,d)

* تأثیر اضافه کردن قطب و صفر روی مکان:

اگر تنها، هدف رسم مکان بود، از PC کمک می گرفتیم. اما مکان هندسی ریشه ها برای طراحی و تنظیم پارامترهای سیستم برای دستیابی به پاسخ مطلوب کاربرد دارد.

طراحی: - تنظیم پاسخ به صورت پاسخ مطلوب، کمک تغییر پارامترهای سیستم.

- آیا می توان پاسخ مطلوب را گرفت؟
- اگر نمی توان، چگونه عمل کنیم؟

همین مثال اخیر را بررسی می کنیم: (شمائی که از مکان هندسی ریشه های آن در بالای صفحه رسم شده است)

- شاخه های مسلط، شاخه های نزدیک محور ها هستند.

مثال: $\left\{ \begin{array}{l} T_s < 4\,(s) \\ P.O < 10\% \end{array} \right. \rightarrow \left. \overset{?}{\zeta, \omega_n} \right\} \rightarrow \underbrace{s_{1,2} = 0.5 \pm j1}$

$S_d$: ریشه مطلوب.

اکنون باید ببینیم این ریشه جزء مکان هست یا خیر؟

اگر هست $\rightarrow$ $K = \frac{-1}{GH(s_d)}$

اگر نیست $\rightarrow$ باید شکل مکان را به گونه ای تغییر دهیم که از نقطه مطلوب عبور کند.

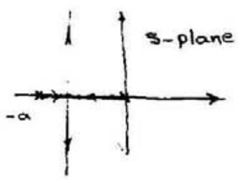
پس از این نقطه در جلسه آینده این بحث دنبال خواهد شد.

* جلسهٔ نوزدهم :     یکشنبه : ۸۲,۲,۲۱

... در واقع ، هدف ، شکل دهی مکان برای عبور از یک نقطه (نقاط) خاص است .

* مثال : تأثیر قطب :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)} \quad , \; a>0$$

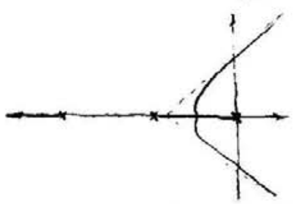



→ پایدار

$\Phi_A = \pm 90$

$$\begin{cases} S_{1,2} = -0.5 \pm j\omega_1 \\ S_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \; (s) \end{cases}$$

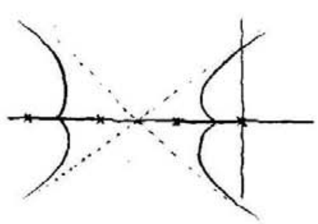
$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)} \quad , \; |a|<|b| \quad a>0 \;\; b>0$$



$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{3} \cdot 180 = 60 , -60 , 180 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b)}{3} \end{cases}$$

اثر : ناپایداری - خم شدن مکان به سمت راست .

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$$



$n-m=4$

$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{4} \times 180 = \pm 45 , \pm 135 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b+c)}{4} \end{cases}$$

⇐ مکان بیشتر به سمت راست می رود ⇐

« قطب به پایداری کمک نمی کند و سیستم را به سمت ناپایداری می برد . »

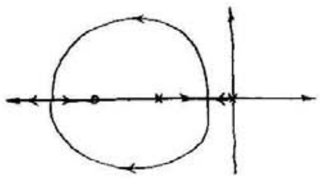
* مثال: - تأثیر صفر:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

$$GH(s) = \frac{(s+b)}{s(s+a)}$$

$n-m=1$

$$\phi_A = \frac{2q+1}{1} \cdot 180 = 180$$



مکان به سمت چپ منحرف می‌شود.

صفر اثر پایدارکننده (پایدارسازی) دارد.

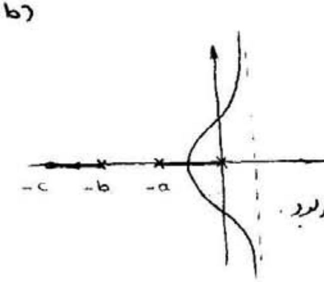
- تذکر: صفر راست باعث ناپایداری می‌شود.

* مثال:

$$GH(s) = \frac{s+c}{s(s+a)(s+b)}$$

$n-m=2$

$$\begin{cases} \phi_A = \dfrac{2q+1}{2} \cdot 180 = \pm 90 \\ \sigma_A = \dfrac{c-(a+b)}{2} \end{cases}$$



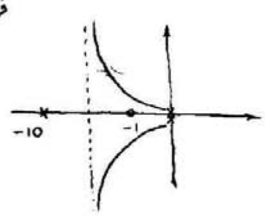

به ازای $c < a+b$ سیستم همواره پایدار خواهد بود.

- تأثیر موقعیت قطب روی مکان ریشه‌ها:

$$GH(s) = \frac{s+1}{s^2(s+a)}$$

$$\begin{cases} \phi_A = \pm 90 \\ \sigma_A = \dfrac{-a+1}{2} \end{cases}$$

فرض: $a=10$




شکل را نمی‌توانیم بطور دقیق رسم کنیم مگر اینکه نقطه قطع محور حقیقی را پیدا کنیم.

$$\frac{dGH(s)}{ds} = \frac{(3s^2+2as)(s-1)-s^3-as^2}{(s^2(s+a))^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2s^3+(a+3)s^2+2as=0 \rightarrow s(2s^2+(a+3)s+2a)=0$$

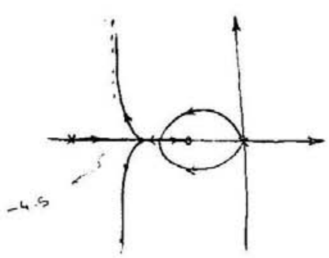
که همواره $s=0$ یک نقطه ترک است.

$$s=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a+3)^2-16a}}{4}$$

زیر رادیکال نمی تواند منفی باشد، چون سیستم درجه ۳ است. که سیستم درجه ۲ می تواند.

$$\left.\begin{array}{l}(a+3)^2-16a>0\\ a^2-10a+9=0\\ (a-1)(a-9)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{c}a\geq 9\\ \text{or}\\ a\leq 1\end{array}\right\}\Rightarrow \Delta\geq 0$$

$a=10 \Rightarrow s=-4\,,\,-2.5$



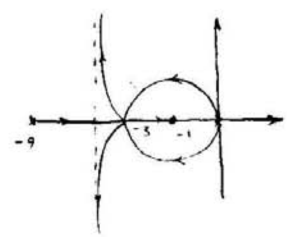

بازای $a=1$ و $a=9$ نقطه ترک تکرار داریم.

بازای $a<1$ ، $a>9$ نقطه قطع و ورود داریم.

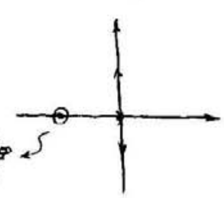
بازای $1<a<9$ نقطه قطع و ورود نداریم.

$a=9 \Rightarrow s_{2,3}=-3$

نقطه قطع تکرار هم ترک هم هست)

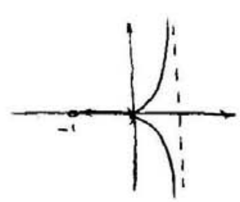



$a=1 \Rightarrow GH(s)=\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}$



که هم قطب و هم صفر (از 1- خارج شده و هم به آن وارد می شود)

$a<1 \Rightarrow$



* تعمیم مکان هندسی ریشه‌ها :

$$1+KGH(s)=0$$

$$\Delta(s)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1S+a_0=0$$

تغییرات ریشه‌های $\Delta(s)$ مثلاً با تغییرات $a_1$ :

مثلاً به شکل $1+a_1GH(s)$ در بیاوریم :

بر جملات فاقد $a_1$ تقسیم می‌کنیم :

$$1+\frac{a_1S}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_2S^2+a_0}$$

* مثال :

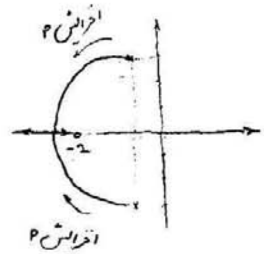
$$K=10 \qquad G(s)=\frac{1}{(S+2)(S+P)}$$

$$\Delta(s)=1+KGH(s)=1+\frac{K}{(S+2)(S+P)}=0$$

$$\Rightarrow (S+2)(S+P)+K=0 \rightarrow S^2+(P+2)S+2P+10=0 \rightarrow S^2+2S+P(S+2)+10=0$$

$$\rightarrow 1+\frac{P(S+2)}{S^2+2S+10}=0$$

$$\text{جدید } GH(s)=\frac{S+2}{S^2+2S+10} \rightarrow$$




$$n-m=1 \qquad \phi_A=180$$

اینکه در P خیلی بزرگ به سمت -2 می‌رود اگر کمک G(s) هم می‌توان تقسیم بیابیم : با بزرگ شدن P می‌توان از ترم (S+P) در مقابل (S+2) صرف‌نظر کرد.

سطوح ریشه :

$$K_1K_2=K$$

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

ابتدا $K_2$ را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)$$

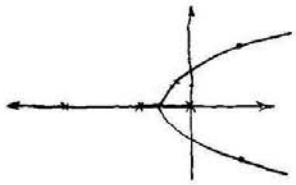
مکان را برای $K_1$ ترسیم می‌کنیم:

بر $P_1$ تقسیم می‌کنیم:

$$1+K_1\cdot\frac{Q_1(s)}{P(s)}=0$$

$$\to 1+K_1\,G_1H_1(s)=0$$

$K_1$ را Fix می‌کنیم:



معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

- مکان را نسبت به $K_2$ رسم می‌کنیم:

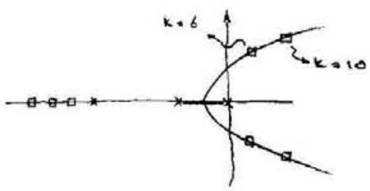
- $\Delta(s)$ را بر $P(s)+K_1Q_1(s)$ تقسیم می‌کنیم:

قطبهای $GH_2$ همان ریشه‌های $P(s)+K_1Q_1(s)$

$$\Delta(s)=1+\frac{K_2Q_2(s)}{P(s)+K_1Q_1(s)}=1+K_2G_2H_2(s)$$

$GH_2(s)$

نمایانگر یک سطح:




- مثال:

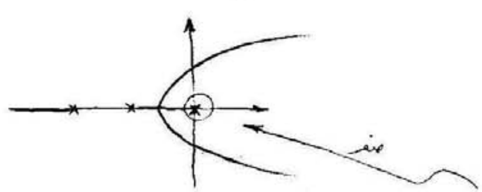
$$GH(s)=\frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}\qquad K_1=K,\quad K_2=KT$$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K(1+Ts)$$

$$T=0\Rightarrow \Delta(s)=\underbrace{s^3+3s^2+2s}_{P(s)}+K \to \Delta(s)=1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

- $K$ را Fix می‌کنیم.

- مکان را برحسب $T$ می‌نویسیم:

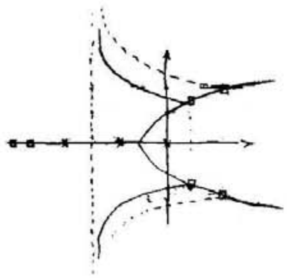



$n-m=2$

$\phi_A=\pm 90$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K+KTs \to \Delta(s)=1+\frac{KTs}{s(s+1)(s+2)+K}$$

$\to$ مجموع قطبها = مجموع ریشه‌ها $=-3 \to \sigma_A=\frac{-3}{2}$



* جلسه بیستم : سه شنبه : ۸۲٫۲٫۲۳

حساسیت ریشه‌ها : (هر چقدر کمتر باشد بهتر است)

قبلاً داشتیم ، $S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}$

اکنون : $S_K^s = \frac{\partial s}{\partial K} \cdot \frac{K}{s}$

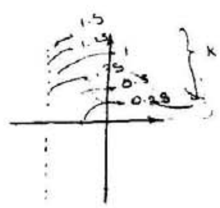
نقاط قطع محور حقیقی :

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 0 \rightarrow \frac{\partial s}{\partial K} = \infty \Rightarrow S_K^s \rightarrow \infty$$

* مثال :

$$\Delta(s) = s(s+1) + K = 0$$

تغییرات K از ۰ تا ۲۰ با گام 0.25 (Matlab)




حل تحلیلی :

$$\Delta(s) = s^2 + s + K = 0 \Rightarrow K = -s(s+1)$$

$$\Rightarrow 2s \cdot \frac{\partial s}{\partial K} + \frac{\partial s}{\partial K} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial K} \cdot (2s+1) = -1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial K} = \frac{-1}{2s+1} \Rightarrow S_K^s = \frac{-1}{2s+1} \cdot \frac{K}{s}$$

$$S_K^s = \frac{s+1}{2s+1}$$

$2s+1=0 \rightarrow s = -1/2 \Rightarrow$ در $s=-0.5$ حساسیت بی‌نهایت است.

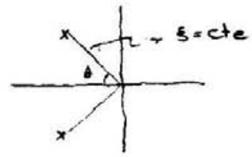
* تمرین : با Matlab گام K را چنان بیابید که سیستم پایدار باشد. $\Delta(s) = s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0$

$$\text{Rlocus}(\overbrace{\underbrace{\text{num}}_{\text{ضرایب صورت}}, \underbrace{\text{den}}_{\text{ضرایب مخرج}}}^{\text{سیستم}}, K)$$

* یافتن تقاطع خط $\zeta = cte$ با مکان هندسی ریشه‌های سیستم:

$$\begin{cases} s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ \theta = \cos^{-1}\zeta \end{cases}$$

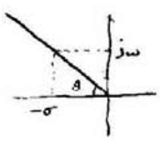
For Example: $\begin{cases} \zeta = .707 \\ \theta = \cos^{-1} .707 = 45^\circ \end{cases}$




اهمیت مطلب در اینجاست که overshoot را فقط $\zeta$ تعیین می‌کند.

For example: $P.O < 10\% \Rightarrow \zeta > 0.45$

Matlab: ginput




$$\begin{cases} \text{خط } \zeta = \cos\theta = \text{ثابت} \\ A(s) = s^n + \dots + a_1 s + a_0 \end{cases}$$

$$s = -\sigma + j\omega$$

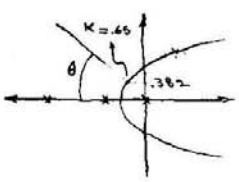
$$tg\,\theta = \frac{\omega}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{tg\,\theta} \Rightarrow s = -\frac{\omega}{tg\,\theta} + j\omega \Rightarrow s = \omega\left(\frac{-1}{tg\,\theta} + j1\right)$$

$\theta = 45^\circ$ مثلاً $\Rightarrow s = \omega(-1+j)$

* مثال: تقاطع خط $\zeta = 0.707$ را با مکان هندسی ریشه‌های سیستم را پیدا کنید.

$$A(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$




$$\theta = \cos^{-1}\zeta = 45^\circ \Rightarrow tg\,\theta = 1$$

$$\Rightarrow s = \omega(-1+j)$$

در $A(s)$ جایگزین می‌کنیم:

$$s^2 = \omega^2(-1+j)^2 = -2j\omega^2$$

$$s^3 = -2j\omega^3(-1+j) = 2\omega^3(1+j)$$

$$\Rightarrow 2\omega^3(1+j) - 6j\omega^2 + 2\omega(-1+j) + K = 0$$

$Re: \quad K - 2w + 2w = 0$

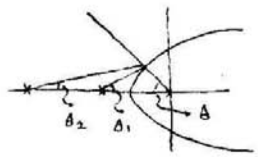
$Im: \quad 2w^3 - 6w^2 + 2w = 0 \quad \rightarrow \quad 2w(w^2 - 3w + 1) = 0$

$$\begin{cases} w = 0 \\ w = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w = 0.382 \\ \rightarrow \text{Re} \text{ جایگذاری در} : K = 0.65 \end{cases}$$

ریشه دیگر به ازای K منفی رخ می‌دهد.

*** راه حل سعی و خطا (گرافیکی) :** (چندان مطلوب نیست فقط به درد امتحان می‌خورد)

یک نقطه با طول r روی خط $\zeta = cte$ انتخاب می‌کنیم (از روی شکل کیفی مکان)
سپس شرط مکان را تست می‌کنیم. اگر ارضا شد، یعنی همان نقطه جزء مکان هست.
اگر نه، طول r را بسته به نوع جواب زاویه کم یا زیاد می‌کنیم:




* پاسخ فرکانسی :

- مزیتهای پاسخ فرکانسی به حوزه لاپلاس:

(۱) مفهوم پهنای باند و فیلترینگ

(۲) تست ساده پاسخ فرکانسی بدون نیاز به تابع تبدیل

(۳) برخورد با سیستم‌های تأخیردار
(کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی)

- عیب:

• تحلیل پاسخ زمانی از روی پاسخ فرکانسی، به راحتی بدست نمی‌آید. مگر برای سیستم درجه ۲ استاندارد.

* ترسیم منحنی های پاسخ فرکانسی (تابع تبدیل sin)

پاسخ فرکانسی، پاسخ سیستم به ورودی سینوسی است.

تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega) \rightsquigarrow G(s)$ : تابع تبدیل لاپلاس

* پاسخ فرکانسی برای چه سیستمهایی می تواند بیان شود؟

برای سیستمهای علی، به سیستمهایی که محور $j\omega$ خود ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن باشد. یعنی سیستم پایدار باشد.

$$G(j\omega)=G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

- ناحیه همگرایی سمت راست آخرین قطب ← آخرین قطب باید سمت چپ محور $j\omega$ باشد.

$$\frac{1}{s-2} \not\to \frac{1}{j\omega-2}$$

* نمایش $G(j\omega)$:

$$G(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega)=Re\{G(j\omega)\} \\ X(\omega)=Im\{G(j\omega)\} \end{cases}$$

$$G(j\omega)=M(\omega).e^{j\phi(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)} \\ \phi(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \end{cases}$$

* منحنی های پاسخ فرکانسی:

(۱) منحنی قطبی یا نایکوئیست

خود موهومی و حقیقی در صفحهٔ $G(j\omega)$

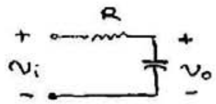
۲) منحنی های بودی:

دامنه و فاز در دو منحنی جدا برحسب فرکانس (راحت تر است اما برای همه سیستمها می توان این [illegible])

۳) لگاریتم اندازه ـ فاز:

(بدست آوردن مشخصه حلقه بسته از روی حلقه باز)

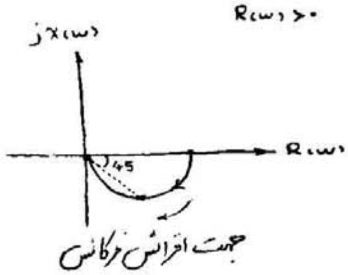
* منحنی های قطبی : Polar-Plot




$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{\frac{1}{CS}}{R+\frac{1}{CS}}=\frac{1}{1+RCS}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}\qquad \left.\begin{array}{l}\tau=RC\\ \omega_1=\frac{1}{RC}\end{array}\right\}\Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+j(\frac{\omega}{\omega_1})}=\frac{1-j(\frac{\omega}{\omega_1})}{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}$$

$$G(j\omega)=\underbrace{\frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}}_{R(\omega)>0}+j\,\underbrace{\frac{-\frac{\omega}{\omega_1}}{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}}_{X(\omega)<0}$$




$$\Leftarrow\begin{cases}\omega=0\to R(\omega)=1\,,\ X(\omega)=0\\ \omega=\infty\to R(\omega)=0\,,\ X(\omega)=0\\ \omega=\omega_1\to R(\omega)=0.5\,,\ X(\omega)=-0.5\end{cases}$$

فاز و اندازه :

$$\begin{cases}M(\omega)=\dfrac{1}{(1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2)^{1/2}}\\ \\ \phi(\omega)=-tg^{-1}(\frac{\omega}{\omega_1})\end{cases}\qquad \omega=0\Rightarrow\begin{cases}M=1\\ \phi=0\end{cases}\qquad \omega=\infty\Rightarrow\begin{cases}M=0\\ \phi=-90^\circ\end{cases}$$

* مثال:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+\tau j\omega)}=\frac{K}{(j\omega-\omega^2\tau)}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K}{((\omega^2\tau)^2+\omega^2)^{1/2}} \\ \phi(\omega)=-tg^{-1}\left(\dfrac{\omega}{-\omega^2\tau}\right)=-tg^{-1}\left(\dfrac{-1}{\omega\tau}\right)\end{cases}$$

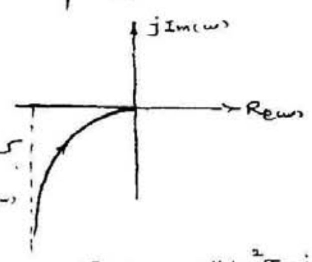
- باید دقت کنیم در کدام ربع شلاقی است.
- بهتر است فاکتورها را جدا در نظر گرفته تا آنها را جمع کنیم:

$$\phi(\omega)=-(\phi(j\omega)+\phi(1+j\omega\tau))$$

$$\rightarrow \phi(\omega)=-90-tg^{-1}(\omega\tau)$$

$$\omega=0 \rightarrow \begin{cases} M=\infty \\ \phi=-90\end{cases} \qquad \omega=\infty \rightarrow \begin{cases} M=0 \\ \phi=-180\end{cases}$$

فاز نمی‌تواند از 180- منفی‌تر باشد و نیز نمی‌تواند مثبت‌تر از 90- باشد پس در ربع سوم قرار دارد:




که برای یافتن مجانب باید Re(w) و Im(w) را محاسبه کرد

$$G(j\omega)=\frac{K}{-\omega^2\tau+j\omega}$$

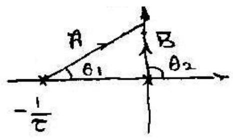
$$G(j\omega)=\frac{-K(\omega^2\tau+j\omega)}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \rightarrow \begin{cases} Re=\dfrac{-K\omega^2\tau}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \\ Im=\dfrac{-K\omega}{\omega^4\tau^2+\omega^2}\end{cases}$$

$$\omega=0 \xrightarrow{\text{مجانب}} \begin{array}{l} R(0)=-K\tau \\ X(0)=-\infty \end{array}$$

روش سوم: از روی دیاگرام قطب و صفر:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)} \qquad G(s)=\frac{K/\tau}{s(s+\frac{1}{\tau})} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})}$$

دیاگرام قطب و صفر:




S-plane

برداری که از $-\frac{1}{\tau}$ به $j\omega$ وصل می‌شود $\longrightarrow$ $j\omega+\frac{1}{\tau}$

$$G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})}$$

$$\begin{cases} A=j\omega \\ B=j\omega+\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K(\tau)^{-1}}{|A||B|} \\ \phi(\omega)=-\theta_1-\theta_2 \end{cases}$$

$$\omega=0 \longrightarrow \begin{cases} |A|=\frac{1}{\tau} \quad |B|=0 \\ \theta_1=0 \ , \ \theta_2=+90 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(\omega)=\infty \\ \phi(\omega)=-90 \end{cases}$$

$$\omega=\infty \longrightarrow \begin{cases} |A|=|B|=\infty \\ \theta_1=\theta_2=+90 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(\omega)=0 \\ \phi(\omega)=-180 \end{cases}$$

تذکر: قطبهای سمت راست را نیز با این Trick میتوان بررسی کرد.

* در منحنی پاسخ فرکانسی اضافه کردن هر فاکتور، منجر به انجام یک سری محاسبات می‌شود.

و حذف فاکتور نیز بدیهی نمی‌شود.

و حلقه بعد از لگاریتم استفاده می‌کنیم: (log : $\times \longrightarrow +$)

• جلسه بیست دوم : یکشنبه : ۸۲،۲،۲۸

• دیاگرام بودی : (Bode-diagram) :

در این دیاگرام منحنی اندازه و فاز برحسب $\omega$ رسم می‌شوند.

$20\log|G|$ — $\omega$

$\phi(\omega)$ — $\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}} , \quad \phi(\omega) = -tg^{-1}\omega\tau$$

«دسی‌بل» پاسخ دقیق‌تر کرده، داده برای دامنه:

$$20\log|G(j\omega)| = -10\log(1+\omega^2\tau^2)$$

بیشترین کاربرد : یافتن مجانب‌ها:

$\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow 20\log|G(j\omega)| = 0\ dB \rightarrow$ مجانب فرکانس پایین

$\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow -10\log 2 = -3dB \rightarrow$ دو مجانب بالا و پایین در $\frac{1}{\tau} = \omega$ به هم می‌رسند
به فرکانس گوشه - فرکانس قطع

$\omega \gg \frac{1}{\tau} \rightarrow -20\log(\omega\tau) \rightarrow$ مجانب فرکانس بالا

مجانب فرکانس بالا : $-20\log(\omega\tau) = -20\log\omega - \overbrace{20\log\tau}^{cte}$

← اگر محور افقی را بصورت لگاریتمی درجه‌بندی کنیم، تبدیل به یک خط می‌شود

تعریف : بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک decade (دهه) تلقی می‌شود اگر: $\omega_2 = 10\omega_1$

شیب مجانب فرکانس بالا : $-20\log\omega_1\tau - (-20\log\omega_2\tau) = -20\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = +20\ dB/decade$

تعریف : بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک Octave (اکتاو) تلقی می‌شود اگر: $\omega_2 = 2\omega_1$

شیب مجانب ذکر شده باید : $-20\log \omega_1\tau + 20\log\omega_2\tau = -20\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = -6\ dB/_{Octave}$

نکته دهم: بر فاکتور درجه 1 ، معادل شیب 20 dB/decade است دیاگرام متوان $90°$ از فاز کم کند.

ترسیم دیاگرام بودی : ( Bode Plot ) :

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_i^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m) \cdot \prod_{K=1}^{R}\left(1+\left(\frac{2\xi_k}{\omega_{nk}}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}}\right)^2\right)}$$

$$\phi(\omega) = \measuredangle G(j\omega) = \measuredangle K_b + \sum_i^{Q} tg^{-1}\omega\tau_i - 90N - \sum_{m=1}^{M} tg^{-1}\omega\tau_m - \sum_{K=1}^{R} tg^{-1}\frac{2\xi_k(\omega/\omega_{nk})}{1-(\omega/\omega_{nk})^2}$$

$$20\log|G(j\omega)| = +20\log|K_b| + \sum_i^{Q} 20\log|1+j\omega\tau_i| - 20N\log\omega$$

$-\sum_{m=1}^{M} 20\log|1+j\omega\tau_m| + \sum_{K=1}^{R} 20\log|$ عبارت درجه ۲ $|$

• هدف از دیاگرام بودی این بود که فاکتورهایش را جدا جدا ببینیم.

(۱) فاکتور کین : $K_b$ :

$G(j\omega) = K_b$

$20\log|G| = 20\log K_b$

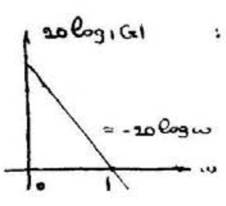
$K_b > 0 \rightarrow \measuredangle G(j\omega) = 0$

$K_b < 0 \rightarrow \measuredangle G(j\omega) = 180$

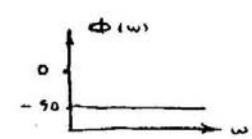
(۲) فاکتور صفر یا قطب در مبداء :

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$20\log|G| = -20\log\omega$ $\rightarrow$




$\measuredangle G(j\omega) = -90$




$-20\ dB/_{decade}$ که شیب خط

* تاثیر فاکتور K این است که فقط شیفت میدهد ولی روی فاز تاثیر ندارد با اینکه $180^\circ$ جهت را عوض میکند.

* اگر داشتیم:

$$G(jw) = \frac{1}{(jw)^N}$$

$$\rightarrow 20\log|G| = -20N\log w \rightsquigarrow 20N \ {}^{dB}/_{decade}$$ کاهش

$$\Phi(w) = -90N$$

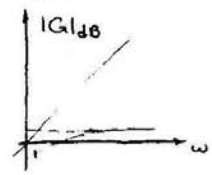
اگر صفر داشتیم (که واقعاً سیستمهای فیزیکی در مبداء صفر ندارند) (و حتی سیستمهای فیزیکی غالباً پائین گذرند).

مثال:

$$G(jw) = (jw)^N$$

$$20\log|G| = 20N\cdot\log w \rightsquigarrow 20N \ {}^{dB}/_{decade}$$ : افزایش

$$\Phi(w) = +90N$$




(۳) فاکتور صفر و قطب ساده:

۳-۱: قطب ساده:

$$G(jw) = \frac{1}{1+jw\tau}$$

$w \ll \frac{1}{\tau}$ : مجانب فرکانس پائین $\rightarrow |G| = \frac{1}{[1+w^2\tau^2]^{1/2}} \rightarrow 20\log|G| = 0$

$w \gg \frac{1}{\tau}$ : مجانب فرکانس بالا $\rightarrow 20\log|G| = -20\log(w\tau) \rightsquigarrow$ کاهش $20 \ {}^{dB}/_{decade}$

فرکانس قطع : $w = \frac{1}{\tau} \rightarrow 20\log|G| = -3\,dB$

خطا Max

* خطا در یک اکتاو زیر فرکانس قطع :

مجانب

$w\tau = 1/2$ خطا $|G|^{Actual}_{dB} - |G|^{Asym}_{dB} \rightarrow$ مجانب صفر

$$|G(jw)|_{dB} = -20\log(1+w^2\tau^2)^{1/2}$$

اصلی

$$= -20\log\sqrt{1+1/4} = -0.97\,dB$$

* خطای در یک اکتاو بالای فرکانس قطع :

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log(1+\omega^2\tau^2)^{1/2} + 20\log(\omega\tau) = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97\ dB$$

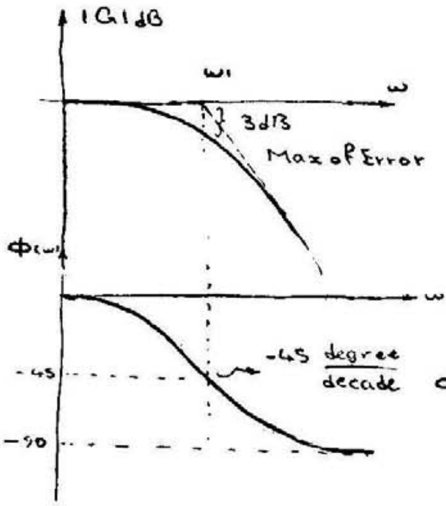
⇐ خطا متقارن است.

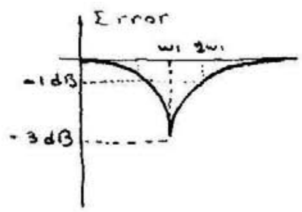
* حداکثر خطا را در فرکانس قطع داریم ( $\omega_c\tau=1$ ) و برابر است با $-3dB$

$\omega\tau = 0.1$ ← یک دهه زیر فرکانس قطع : → $-0.04\ dB$

$\omega\tau = 10$ ← یک دهه بالای فرکانس قطع : → $\mp 0.04\ dB$

← خطا در یک دهه پایین و بالای فرکانس قطع در حدود 0.04dB است.



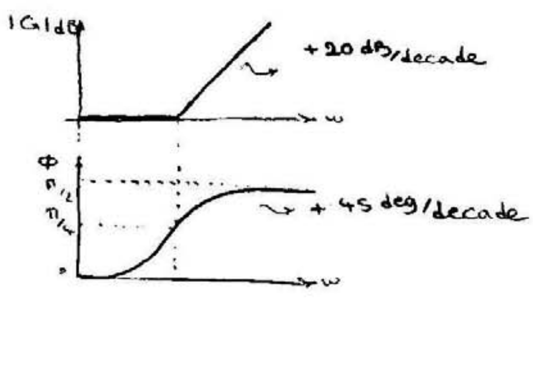

$\phi(\omega) = -tg^{-1}\omega\tau$

$\omega=\omega_1=\frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi=-\pi/4$

۲-۱۳) صفر ساده:

$G(j\omega) = 1+j\omega\tau$

عکس همان حالت:



(۴) حالت قطب مزدوج مختلط :

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad , \quad 0<\xi<1$$

بصورت ثابت زمانی می‌نویسیم : $G(s)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi j\cdot\frac{\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\rightarrow |G|=\frac{1}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$20\log|G|=-10\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

مجانب فرکانس پایین : $\omega\ll\omega_n$ : $20\log|G|=0\ dB$

مجانب فرکانس بالا : $\omega\gg\omega_n$ $\quad -40\log\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow$ با شیب $40\ dB/dec$ افت میکند.

مشاهده میشود مجانب‌ها بستگی‌ای به $\xi$ ندارند.

ولی سیستمهای دارای میرایی، پیک دارند. اگر سیستمی را با فرکانس طبیعی تحریک کنیم، تشدید رخ میدهد.

$$u\triangleq\frac{\omega}{\omega_n}\rightarrow |G|^2=\frac{1}{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2}$$

$$dG/du=0 \rightarrow \cdots \rightarrow u=\sqrt{1-2\xi^2}$$

فرکانس تشدید $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

resonance frequency

$$\begin{cases}\xi=0 \rightarrow \omega_r=\omega_n\\ \xi>0 \rightarrow \omega_r<\omega_n\\ \xi>\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \text{تشدید نداریم}\end{cases}$$

$$|G|^2_{u_r}=\frac{1}{(1-u^2)^2+4\xi^2u^2} \qquad u_r=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)|$ ...

ماکزیمم پیک

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$M_{p\omega}$ تنها تابع میرایی سیستم است.

به ازای $\xi = 0$ ، این پیک پاسخ فرکانسی، بینهایت $\infty$ است و در $\omega = \omega_n$ رخ می دهد.

* جلسهٔ بیست دوم:  سه‌شنبه: ۸۲/۲/۳۰

Makeup Class tentative Next Thursday, Khordad: 8, 2PM

پاسخ فرکانسی:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\xi\left(\frac{j\omega}{\xi_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad 0<\xi<1$$

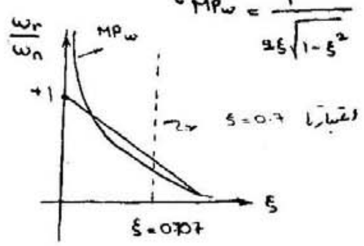
قطب چندتحلیل:

منحنی لگاریتم اندازه و فاز برحسب فرکانس (منحنی‌های بودی (Bode diagram

Matlab Code: nyquist(sys,w) : قطبی

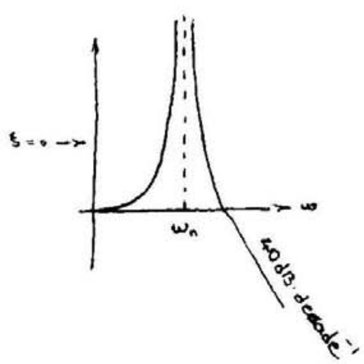
[meg,ph] = bode[sys,w] : بودی

$$|G|_{dB} \to \begin{cases} \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ MP_\omega = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases} \qquad \xi\uparrow \to \begin{cases} \omega_r\downarrow \\ MP_\omega\downarrow \end{cases}$$

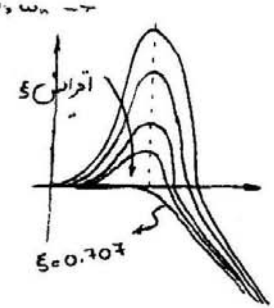



آلان با در دست داشتن پاسخ فرکانسی، می‌خواهیم پارامترهای سیستم درجه ۲ را بیابیم:

به ازای ξهای مختلف، پاسخ فرکانسی را رسم می‌کنیم:




$\xi = 0.5 \to$ کم می‌شود $MP_\omega, \omega_n \to$




به ازاء $\xi > 0.707$ دیگر تشدید نخواهیم داشت.

$MP_\omega$ تنها تابع میرایی سیستم (ξ) است.

رسم منحنی فاز:

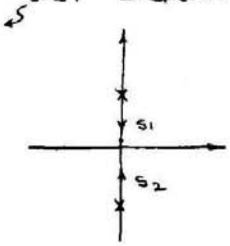
$$u=\frac{\omega}{\omega_n}\qquad G(j\omega)=\frac{1}{1-u^2+j2\xi u}\ ,\quad \phi(\omega)=\measuredangle G(j\omega)$$

$$\phi(\omega)=-tg^{-1}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

$$\begin{cases} u=0 \rightarrow G(j\omega)=0 \\ u=\infty \rightarrow \phi(\omega)=-180^\circ \\ u=1 \rightarrow \phi(\omega)=-90^\circ \end{cases}$$

$u=1 \rightarrow \omega=\omega_n$

مقادیر دسته منحنی‌های فاز برای $u=0,1,\infty$ از مقادیر $\rightarrow$ ثابتی (بدون وابستگی به $\xi$) عبور می‌کند.



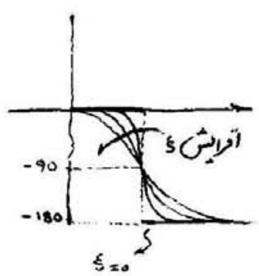

$$\xi=0 \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$P_1, P_2=\pm j\omega_n$$

$$0<\omega<\omega_n \rightarrow \measuredangle S_1=-90 \quad \measuredangle S_2=+90 \rightarrow G(j\omega)=-(-90+90)=0$$

$$\omega_n<\omega \rightarrow \measuredangle S_1=+90 \quad \measuredangle S_2=+90 \rightarrow G(j\omega)=-(90+90)=-180$$

برای $\xi=0$ منحنی فاز گسسته است:




* سیستمهای مینیمم فاز و نامینیمم فاز: (Minimum and Non-minimum Phase Systems)

سیستمهایی که صفر یا قطب سمت راست دارند، نامینیمم فاز هستند.

غلط مصطلح: به سیستمهای دارای صفر سمت راست، نامینیمم فاز گویند.

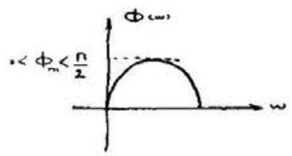
برای منحنی دامنه داده شده، فقط یک تابع تبدیل وجود دارد که منحنی فاز آن در مقایسه با بقیه توابع تبدیلی که دارای منحنی دامنه مشابه هستند، ولی فاز متفاوت دارند، مینیمم است، به آن تابع تبدیل مینیمم فاز اطلاق می‌شود و به بقیه سیستمهای نامینیمم فاز.

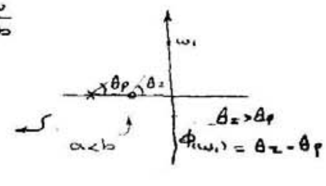
* مثال:

$$G_1(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + b} \qquad G_2(j\omega) = \frac{j\omega - a}{j\omega + b}$$

$$\begin{cases} |G_1| = \dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}} \\ |G_2| = \dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}} \end{cases} \rightarrow |G_1| = |G_2|$$

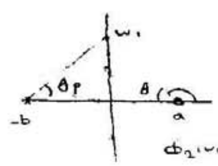
$$\measuredangle G_1 = \Phi_1(\omega) = tg^{-1}\frac{\omega}{a} - tg^{-1}\frac{\omega}{b}$$



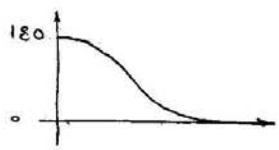




$$\measuredangle G_2 = \Phi_2(\omega)$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow \Phi_2(\omega) = 180 \\ \omega = \infty \rightarrow \Phi_2(\omega) = 0 \end{cases}$$




$$\Phi_2(\omega) = \theta_z - \theta_p = 180 - \theta - \theta_p$$




فاز سیستم قبلی 0 و 90 بود در حالیکه فاز سیستم دوم 0-180 است.
سیستم 1 مینیمم فاز بود.

$G_1$ و $G_2$ مشخصه دامنه یکسانی داشتند، پس باید شباهتی با یکدیگر داشته باشند.

$$G_2(j\omega) = \frac{j\omega - a}{j\omega + b} \times \frac{j\omega + a}{j\omega + a} \rightarrow G_2(j\omega) = \frac{j\omega + a}{j\omega + b} \cdot \frac{j\omega - a}{j\omega + a} \rightarrow$$

$$G_2(j\omega) = \underbrace{\frac{j\omega - a}{j\omega + a}}_{A(j\omega)} \cdot G_1(j\omega)$$

می‌خواهیم ببینیم چگونه تابع تبدیل نامینیمم را از تابع تبدیل مینیمم بسازیم؟

$A(\omega) \Rightarrow \forall \omega : |A(\omega)| = 1$ → All Pass Filter

$A(\omega)$ تابع تبدیلی بصورت all-pass-filter است که تابع تبدیلی حقیقی گویا است و تمام صفرهایش قرینه قطبهایش نسبت به محور $j\omega$ قرینه است.

* مثال: تابع تبدیل تأخیر انتقال تمام گذر است:

$A(s) = e^{-\tau s}$

$\rightarrow A(j\omega) = e^{-\tau j\omega} \Rightarrow |A(j\omega)| = 1$

$\phi(\omega) = -\omega\tau$

- تذکر: تابع تبدیل تأخیر انتقال حقیقی گویا نیست ولی در عمل وجود دارد.

* فیلترهای all-pass که به سیستم اضافه می‌شود باعث می‌شوند که از یک فرکانس به بعد $|G|=1$ شود. فیلترهای all-pass روی منحنی اندازه بی‌اثرند و تنها روی منحنی فاز موثرند. به کمک منحنی فاز می‌توان به نوع فیلتر all-pass پی برد.

نتیجه: اگر سیستم مینیمم فاز باشد، از روی مشخصه دامنه، مشخصه فاز را می‌توانیم بیابیم.

توضیح: برای سیستم مینیمم فاز $A(\omega)=1$ است. اما وقتی سیستم نامینیمم فاز است نمی‌دانیم چه تابع تمام گذری ضرب شده است ← بدون منحنی فاز نمی‌توانیم آن را تشخیص دهیم.
و چون تعداد نامحدود تابع all-pass وجود دارد که همان منحنی اندازه ولی منحنی فاز متفاوت می‌دهد.

- صفر سمت راست دارای تأخیری باشد.

• قضیه بود: (Bode Theorem)

برای توابع تبدیل مینیمم فاز، فاز تابع تبدیل بطور یکتا، توسط منحنی اندازه می‌تواند بدست آید. در واقع در هر فرکانس، فاز و لگاریتم اندازه توسط جفت تبدیل هیلبرت به هم مرتبط می‌شوند ولی برای توابع نامینیمم فاز درست نیست. زیرا ضرب یک تابع تمام گذر در تابع تبدیل، منحنی اندازه را تغییر نمی‌دهد ولی منحنی فاز را تغییر می‌دهد.

$$\measuredangle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Ln|G|}{dv}\, Ln\, Cotg\frac{|v|}{2}\,dv + \measuredangle \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{j\omega_0 + z_i}{j\omega_0 - z_i}\right) \quad , \quad v = Ln\frac{\omega}{\omega_0}$$

* تشخیص سیستم مینیمم فاز:

$$G(s) = \frac{s^m + \cdots}{s^n + \cdots}$$

اگر بدانیم گین مثبت است

$$G(s) = \frac{1}{s^{n-m}} \quad : s \to \infty$$

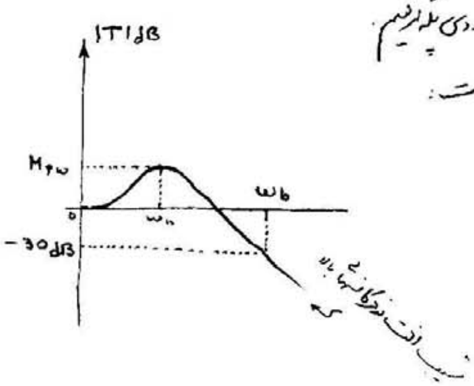
$$\omega \to \infty \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) = -90(n-m)$$

اگر سیستم مینیمم فاز باشد، در نهایت $\overset{\omega\to\infty}{\Phi(\omega)} = -90(n-m)$

* تذکر: برای همه سیستمها در فرکانسهای بالا، منحنی اندازه با شیب $-20(n-m)\,\frac{dB}{decade}$ افت می‌کند.

* اندازه‌های عملکرد بر حسب پاسخ فرکانسی:

به یاد دارید که برای سیستم زمانی، پاسخ زمانی سیستم درجه ۲ به ورودی پله گرفتیم.
در حیطه فرکانس هم، پاسخ فرکانسی مطلوب سیستم درجه ۲ است:




$\underbrace{T_r \downarrow}_{\text{سرعت سیستم}} \;,\; T_s \uparrow \;\leftarrow\; \xi \downarrow$

* اندازه‌های عملکرد:
(۱) $M_{p\omega}$ : پیک پاسخ فرکانسی
(۲) $\omega_b$ : پهنای باند
(۳) cut-off rate : شیب افت پاسخ فرکانسی در فرکانسهای بالا

- تذکر: وقتی طراحی در حوزه فرکانس است (مثل طراحی فیلتر) ← اندازه‌های عملکرد در حوزه فرکانس در اختیار است.

اما وقتی می‌خواهیم سیستم زمانی طراحی کنیم، اما ابزاری که در اختیار داریم، فرکانسی است باید به معیارهای پایداری و سرعت توجه کنیم و از این رابطه این معیارها با حوزه فرکانس را باید بدانیم:

پایداری در زمان به P.O بستگی دارد (چون P.O فقط به $\xi$ بستگی دارد و اگر $\xi$ بیشتر باشد ← پایداری نسبی بیشتر است) (چون از محور $j\omega$ دور می‌شویم)

در حوزه فرکانس پایداری مربوط است به $M_{p\omega}$

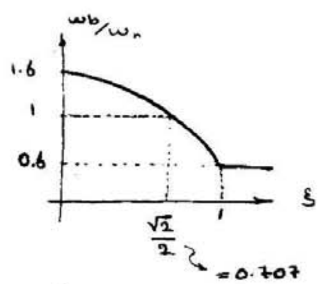
← یک پاسخ فرکانسی معیاری از پایداری است $M_p$ بالاتر یعنی پایداری نسبی کمتر زیرا $\xi$ کوچکتر است.

معیار سرعت در حوزه فرکانس، پهنای باند است.

پهنای باند معیاری است از سرعت، زیرا سیستمی با پهنای باند بیشتر می‌تواند فرکانسهای بالاتری عبور دهد ← سریعتر است.

- تذکر: بنابه تعریف، $\omega_b$ فرکانسی است که در آن دامنه به $-3dB$ می‌رسد.

$$|T|_{dB}=-3dB \rightarrow |T|=0.707 \Rightarrow \omega_b=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2(1-\xi^2)}}$$




رسم نمودار $\frac{\omega_b}{\omega_n}$ برحسب $\xi$:

نتیجه: در $\xi=\frac{\sqrt2}{2}$ ← $\omega_b=\omega_n$

* در $\xi$ ثابت، با افزایش $\omega_n$، $\omega_b$ هم زیاد می‌شود ← سرعت سیستم زیاد می‌شود ← درست است که پهنای باند معیاری از سرعت است.

* در $\omega_n$ ثابت، برای افزایش $\omega_b$، باید $\xi$ را کم کنیم.

* سرعت را متناسب با $T_r$ و $T_p$ تعریف می‌کنیم (نه $T_s$)

* جلسه بیست و سوم:                     یکشنبه: ۸۲،۳،۴

پاسخ فرکانسی: منحنی‌های بودی:

از روی پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت:

تعداد انتگرال‌گیرها در حلقه

از روی دیاگرام اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت:

$$GH(s) = \frac{K(1+T_{z_1}s)(1+T_{z_2}s)\cdots(1+T_{z_m}s)}{s^N(1+T_{p_1}s)(T_{p_2}s+1)\cdots(1+T_{p_n}s)}$$

در فرکانس‌های پایین، با استفاده از شیب منحنی در حوالی فرکانس صفر می‌توان N را از روی مشخصه فرکانسی یافت.

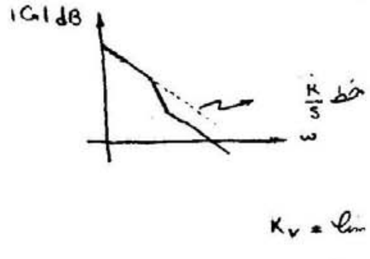
ثابت خطای موقعیت برابر با ابتدای منحنی اندازه در حوالی فرکانس‌های صفر بدست می‌آید:

$$N=0 \rightarrow \lim_{s \to 0} GH(s) = K$$

برای سیستم نوع یک ثابت خطای غیر صفر و غیر بینهایت وجود دارد که آن را از مشخصه اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان یافت.

$$N=1 \rightarrow \lim_{s \to 0} GH(s) = \frac{K}{s} \qquad \text{or} \qquad \lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

منحنی اندازه پاسخ فرکانسی (البته منحنی بودی آن) یک خط صاف با شیب $-20\,dB/decade$ است.




باید بتوانیم ثابت خطای سرعت را بیابیم:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,GH(s)$$

منحنی اندازه در فرکانسهای پایین را ادامه می‌دهیم تا خط 0dB را (در $\omega = \omega_1$)؛

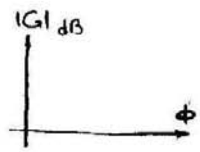
$$20 \log \frac{K}{\omega_1} = 0 \rightarrow \underbrace{K = \omega_1}_{\text{ثابت خطای سرعت}}$$

برای Nهای بزرگتر نیز به همین صورت عمل می‌کنیم.

• دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز:

- تاکنون دو دسته منحنی داشتیم:
  - قطبی: $G(j\omega)$
  - بودی:
    - لگاریتم اندازه برحسب فرکانس
    - لگاریتم فاز برحسب فرکانس

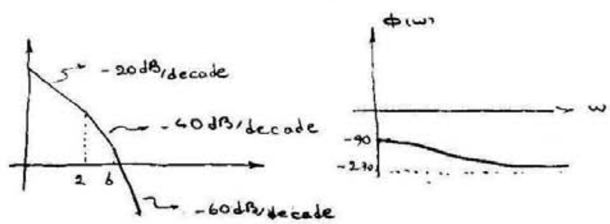
دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز:




- اطلاعات اندازه و فاز از روی دیاگرام بودی بدست می‌آید.

• مثال:

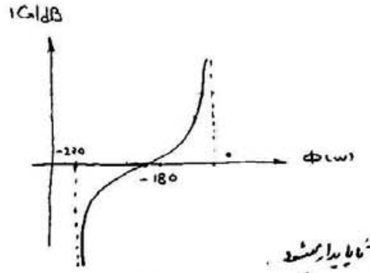
$$GH(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+\frac{j\omega}{6})}$$




توضیح: - در شروع منحنی |G| با شیب -20dB/decade افت می‌کند.

- اولین شکست در $1+0.5\omega = 0 \rightarrow \omega_{c1} = 2$ می‌رسیم و شیب افت -40 می‌شود.

- برای منحنی فاز، $j\omega$ در مخرج یک فاز $\frac{\pi}{2}$ دائمی دارد. هر ریشه درجه 1 (قطب درجه 1) حداکثر $\frac{\pi}{2}$ افت فاز دارد.




بررسی پایداری:

فرضا $T=\frac{1}{1+G}$ ← اگر $\begin{cases}|G|=1\\ \angle G=180\end{cases}$ ← T ناپایدار میشود.

$\begin{cases}|G|_{dB}=0\\ \Phi=180\end{cases}$ ← در بررسی پایداری باید دید که:

- در $\Phi=180$: منحنی اندازه چقدر با صفر فاصله دارد.
- در $|G|_{dB}=0$، منحنی فاز چقدر با 180 فاصله دارد

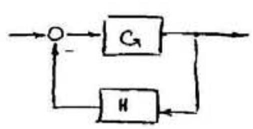
## • پایداری در حوزهٔ فرکانس:

• هدف: از روی پاسخ فرکانسی حلقه باز سیستم، پایداری سیستم حلقه بسته را تشخیص دهیم.

• تذکر: برای سیستمهای خطی، کلی ترین معیار پایداری، پایداری در حوزهٔ فرکانس است.

(چون دو نقص دارد، مکان هندسی ریشه‌ها و معیار راث جوابگو نیستند)

• پیش از ورود به این بحث، باید موارد زیر مشخص شود:




$$T=\frac{G}{1+GH}$$

a) ارتباط قطبهای $1+GH$ با قطبهای $GH$

b) ارتباط قطبهای T با صفرهای $1+GH$

c) مفهوم نگاشت نقاط

d) مفهوم نگاشت کانتور

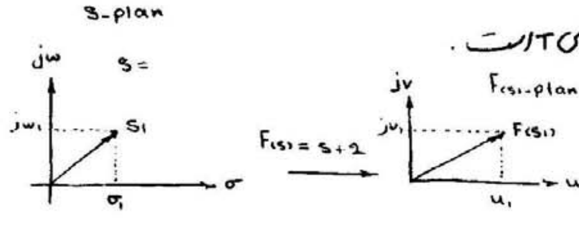
- فرض:

$$H=\frac{N_h}{D_h} \qquad G=\frac{N_g}{D_g}$$

$$T=\frac{G}{1+GH}=\frac{\frac{N_g}{D_g}}{1+\frac{N_gN_h}{D_gD_h}}=\frac{\frac{N_g}{D_g}}{\underbrace{\frac{N_gN_h+D_gD_h}{D_gD_h}}_{1+GH}}$$

← قطبهای $1+GH$ همان قطبهای $GH$ است.

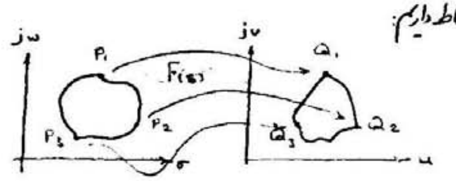
← صفرهای $1+GH$ همان قطبهای $T$ است.




$S_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ $\qquad$ $F(s_1) = u_1 + jv_1$

← $F(s_1)$ نگاشت $s_1$ است تحت تابع $F(s)$

ـ الان به فرض در صفحه s به جای یک نقطه، مجموعه نقاط داریم:

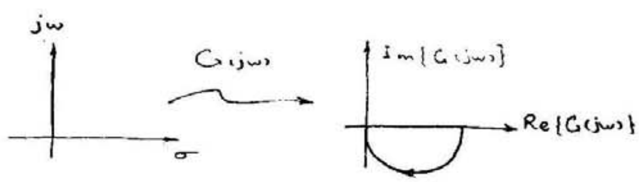



کانتور: مجموعه نقاط پیوسته

کانتور بسته: مجموعه نقاط پیوسته بسته

ـ تذکر: اگر کانتور در صفحه s پیوسته باشد، دراین کانتور در صفحه $F(s)$ نیز پیوسته است که: کانتور صفحه s از صفر و قطبهای $F(s)$ عبور نکند.

* مثال: از نگاشت کانتور:

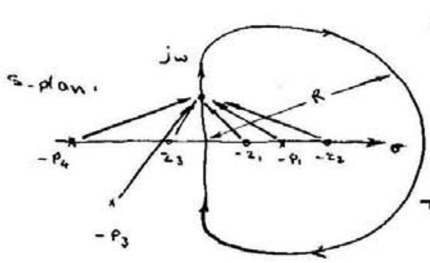



جهت کانتور: جهت افزایش فرکانس (جهت عقربه‌های ساعت)

پس از مقدمه، می‌پردازیم به بحث پایداری در حوزه فرکانس:

$$F(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

در فرض دیاگرام صفر و قطب $F(s)$ به صورت زیر است:




← کانتور A

• کانتور A : نیمصفحه سمت راست را شامل محور $j\omega$ ← کانتور A : نیمدایره ای شامل کل محور $j\omega$ با شعاع $R \to \infty$

بردارهای $s+z_1$ ، $s+z_2$ ، $s+p_1$ ، هنگامیکه کانتور را یکبار در جهت کانتور طی میکنیم، $360^\circ$ تغییر فاز میدهند (یکبار کامل میچرخند)

→ چرخش خالص بردارهای $s+z_3$ ، $s+p_4$ ، $s+p_2$ ، $s+p_3$ صفر است ← وقتی کانتور را یکبار در جهت کانتور طی کنیم تغییر خالص فاز آنها صفر است.

تعمیم:

(a) در چرخش در جهت کانتور، بردارهای درون کانتور یکبار کامل میچرخند

(b) در چرخش روی کانتور در جهت آن، بردارهای خارج کانتور، چرخش خالص صفر دارند.

* تغییر زاویه خالص $F(s)$ = تغییر زاویه صفرها − تغییر زاویه قطبها

$= 2(360) - 1(360)$ برای مثال اخیر

$z$ : تعداد صفرهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند.

$p$ : تعداد قطبهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند

تعریف میکنیم : $N = z - p$ ( $N$ میتواند مثبت باشد یا منفی)

→ تغییر خالص زاویه $F(s)$ = $N \times 360^\circ$ = تعداد دفعاتی که $F(s)$ مبداء صفحه $F(s)$ را دور میزند

اگر $N>0$ باشد ← $F(s)$ در جهت کانتور دور میزند

• قضیه آرگومانها: (Principle of Arguments)

اگر تابع $F(s)$ دارای $z$ صفر و $p$ قطب درون کانتور بسته A باشد و کانتور A از هیچ صفر یا قطب $F(s)$ عبور نکند آنگاه، به ازای تغییرات $s$ در طول کانتور A، منحنی $F(s)$ مبداء صفحه مختصات را به تعداد $N = z - p$ بار دور خواهد زد.

(اثبات در کتاب اگاتا - Page 584)

• پایداری: فرض کنیم $F(s) = 1+GH(s) = A(s)$

برای پایداری $T = \frac{C}{F}$ باید T قطبی در RHP نداشته باشد ⟵ $F(s)$ نباید صفری در RHP داشته باشد

و چون RHP ، همان داخل کانتور A است ⟵

برای پایداری، $F(s)$ نباید صفری درون کانتور A داشته باشد: یعنی: $Z=0$ باشد.

از طرفی P نیز معلوم است. (چون قطبهای $F(s)$ (همان P) همان قطبهای GH هستند)

⟵ P = تعداد قطبهای سمت راست تابع $GH(s)$ *

* نتیجه: اگر نگاشت کانتور A تحت $F(s)$ را در صفحه $F(s)$ ترسیم کنیم و تعداد دورها را بشماریم:

اگر $N=-P$ باشد ⟵ سیستم حلقه‌بسته (T) پایدار است.

تذکر: (۱) $N=-P$ یعنی: در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، به اندازه P بار دور بزند.

(۲) بیان کردیم که P نیز معلوم است.

• قضیه نایکوئیست:

اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم ($GH(s)$) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری باید منحنی $F(s)$ باید (به ازای تغییرات s در طول کانتور A) به تعداد P- بار مبدا صفحه $F(s)$ را دور بزند.

یعنی P بار در جهت عکس عقربه‌های ساعت.

تذکر: می‌خواستیم از روی منحنی $GH(s)$ پایداری را مشخص کنیم، نه از روی $F(s)$:

$F(s) = 1 + GH(s)$

مبدا صفحه $F(s)$ به نقطه $(-1,0)$ در صفحه $GH(s)$ مربوط است. ⟵ می‌توان قضیه را به فرم زیر بیان کرد:

* اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم ($GH(s)$) دارای $P$ قطب سمت راست باشد، برای پایداری باید منحنی $GH(s)$، (به ازای تغییرات $s$ در طول کانتور $R$)، به تعداد $P$ بار، نقطه $(-1,0)$ را در صفحه $GH(s)$ دور بزند. یعنی $P$ بار در عکس جهت عقربه‌های ساعت.

* منحنی نایکوئیست: منحنی $GH(s)$ است (به ازای تغییرات $s$ در کانتور $R$) در صفحه $GH(s)$.

* شرط پایداری نایکوئیست:

سیستم فیدبک (یعنی حلقه بسته) پایدار است، اگر و فقط اگر تعداد چرخشهای دیاگرام نایکوئیست (منحنی) در جهت ccw (یعنی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) حول نقطه $(-1,0)$ مساوی باشد با تعداد قطبهای $GH(s)$ در RHP.

اگر $P=0$ باشد: سیستم فیدبک پایدار است اگر دیاگرام نایکوئیست $(-1,0)$ را دور نزند.

* کانتور $R$ سه قسمت دارد:

(۱) $\omega>0$ : دیاگرام قطبی (پاسخ فرکانسی)

(۲) $\omega<0$ : قرینه دیاگرام قطبی

(۳) $s\to\infty$ : در طول نیم دایره بزرگ

$$GH(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}\times K$$

در طول نیم دایره بزرگ

$$\begin{cases} m=n \rightarrow s\to\infty: & GH(s)=K \\ m<n: \rightarrow s\to\infty, & GH(s)=0 \end{cases}$$

* قسمت اصلی منحنی نایکوئیست همان بخش $\omega>0$ است.