# جزوه دستنویس درس استاتیک

نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک تدریس شده توسط مهندس ***احمدرضا جعفری***

دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان

گروه عمران

1387

WWW.jafarii.blogfa.com

## بردارها :

- انواع کمیت های اسکالر و کمیت های برداری :

### کمیت های اسکالر :

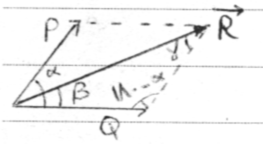
کمیت هایی هستند که تنها دارای اندازه هستند مانند: جرم، مسافت طی شده و زمان

### کمیت های برداری :

کمیت هایی هستند که علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز می باشند مانند: نیرو، شتاب، گشتاور و سرعت

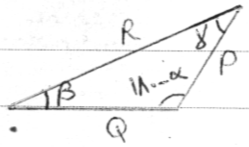
### روش های جمع برداری :

۱) روش متوازی الاضلاع



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$|R|^۲ = |P|^۲ + |Q|^۲ + ۲|P||Q|\cos\alpha$$



$$\frac{|R|}{\sin(۱۸۰-\alpha)} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

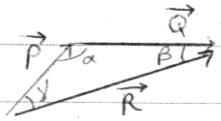
$$\sin(۱۸۰-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|P|}{\sin\beta} = \frac{|Q|}{\sin\gamma} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \_\_\_ \\ \gamma = \_\_\_ \end{cases}$$

با محاسبه یکی از دو زاویه β یا γ می توان زاویه بردار نتیجه با یکی از دو راستای اصلی افقی یا عمودی را بدست آورد

۲) روش مثلث

$$\cos(۱۸۰-\alpha) = -\cos\alpha$$



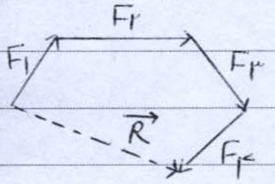
$$|R|^۲ = |P|^۲ + |Q|^۲ - ۲|P||Q|\cos\alpha$$

$$\frac{|R|}{\sin\beta} = \frac{|R|}{\sin\alpha} = \frac{|Q|}{\sin\gamma}$$

Tamasha

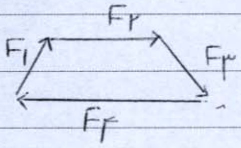
## ۳) روش ترسیمی

در این روش بردارها بطور متوالی ترسیم می گردند به گونه ای که ابتدای هر بردار بر انتهای بردار قبلی منطبق گردد. برداری که ابتدای اولین بردار را به انتهای آخرین بردار وصل می کند بردار برآیند می باشد. در این رسم لازم است که ترسیم بردارها به صورت دقیق و با مقیاس مناسب انجام گیرد



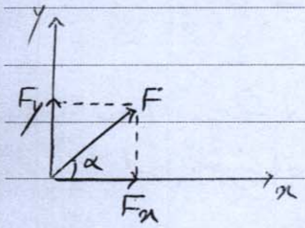
$$\vec{R} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

نکته: اگر پس از ترسیم ابتدای اولین بردار و انتهای آخرین بردار بر هم منطبق شدند برآیند بردارها صفر می باشد



## ۴) روش جمع مؤلفه های برداری:

در این روش هر بردار را به مؤلفه های اصلی خود در راستای محورهای اصلی تجزیه می کنیم و سپس این مؤلفه ها را در راستای هر یک از جهات اصلی با هم جمع جبری می کنیم. مقادیری که بدست می آید مؤلفه های برداری، بردار برآیند در هر یک از راستاهای اصلی خواهد بود



$$\Rightarrow F_x = |F|\cos\alpha$$

$$F_y = |F|\sin\alpha$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

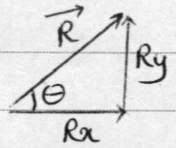
i و j بردارهای یکه در راستای هر یک از دو محور اصلی x و y هستند

بردار یکه: برداری است به بزرگی واحد و هم راستا و هم جهت با بردار اصلی

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

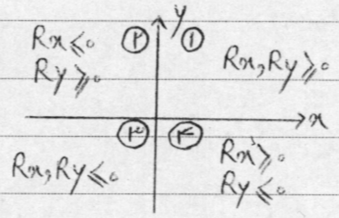
$$\left.\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{R_x i} + \vec{R_y j} \\ F_1 &= F_{1x} i + F_{1y} j \\ F_2 &= F_{2x} i + F_{2y} j \\ F_n &= F_{nx} i + F_{ny} j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = F_{1x} + \dots + F_{nx} \\ R_y &= \sum F_{iy} = F_{1y} + \dots + F_{ny} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$



$$\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

برحسب آنکه مقادیر Rx و Ry دارای چه علامتی باشند بردار نتیجه در یکی از چهار ناحیه دستگاه مختصات قرار می گیرد



بردارها در فضا:

در حالت سه بعدی بردارها علاوه بر دو بعد x و y دارای یک مولفه در راستای محور z نیز می باشند بردار یکه در راستای محور z با K نمایش داده می شود

$\vec{\lambda}$: بردار یکه بردار F است که دارای بزرگی (۱) و هم موازات بردار F می باشد

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{\vec{F}}{|F|} = \frac{F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} \qquad \vec{\lambda} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k$$

$$\lambda_x = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \dots$$

Tamasha

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

$$\vec{\lambda} = \underbrace{\cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k}_{\text{کسینوس های هادی بردار } F}$$

$\alpha$ : زاویه بردار F با محور x

$\beta$ : " " " y

$\gamma$ : " " " z

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\begin{cases} F_x = |F| \cdot \cos\alpha \\ F_y = |F| \cdot \cos\beta \\ F_z = |F| \cdot \cos\gamma \end{cases}$$

نیرویی که اندازه و دو نقطه از خط اثر آن معلوم است:

فرض کنید که بردار $\vec{F}$ با $|F|$ موجود است. این بردار از نقطه M به سمت نقطه N می باشد، مؤلفه های برداری این بردار به شکل زیر محاسبه می شود

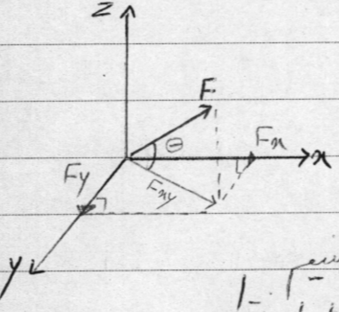
$$M(x_1, y_1, z_1)$$

$$N(x_2, y_2, z_2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\vec{F} = |F| \cdot \vec{\lambda} \quad , \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{|MN|}$$

مؤلفه های یک بردار فضایی بر روی یکی از صفحات اصلی:



$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

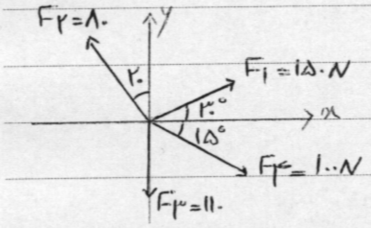
فرض کنیم می خواهیم تصویر یا مؤلفه این بردار را در صفحه xy بدست آوریم از انتهای بردار F به موازات محور z یک عمود بر صفحه xy ترسیم می کنیم تا این صفحه را در یک نقطه قطع کند برداری که ابتدای بردار را به نقطه بدست آمده وصل می کند تصویر بردار خواهد بود

Tamasha

$|F_{xy}| = |F| . \cos\theta$

$|F_{xy}| = \sqrt{F_x^۲ + F_y^۲} \Rightarrow \vec{F_{xy}} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند چهار نیروی نشان داده شده در شکل زیر با استفاده
از روش جمع مؤلفه های برداری؟



$F_{۱x} = ۱۵۰ . \cos ۳۰ = ۱۲۹,۹$

$F_{۱y} = ۱۵۰ . \sin ۳۰ = ۷۵$

$F_{۲x} = -۸۰ . \sin ۲۰ = -۲۷,۴$

$F_{۲y} = ۸۰ . \cos ۲۰ = ۷۵,۲$

$F_{۳x} = 0 \quad , \quad F_{۳y} = -۱۱۰$

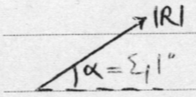
$F_{۴x} = ۱۰۰ . \cos ۱۵ = ۹۶,۶$

$F_{۴y} = -۱۰۰ . \sin ۱۵ = -۲۵,۹$

$R_x = \Sigma F_x = ۱۲۹,۹ - ۲۷,۴ + 0 + ۹۶,۶ = ۱۹۹,۱$

$R_y = \Sigma F_y = ۷۵ + ۷۵,۲ - ۱۱۰ - ۲۵,۹ = ۱۴,۳$

$R = ۱۹۹,۱\vec{i} + ۱۴,۳\vec{j} \Rightarrow |R| = \sqrt{۱۴,۳^۲ + ۱۹۹,۱^۲} = ۱۹۹,۶$



$\Rightarrow \alpha = \mathrm{Arctan}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{۱۴,۳}{۱۹۹,۱}\right) = ۴,۱°$

مثال: نیرویی به اندازه ۵۰۰N با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای ۶۰، ۴۵ و ۱۲۰°
تشکیل می دهد مولفه های Fx، Fy، Fz این نیرو را تعیین کنید؟

$|F| = ۵۰۰$

$F = F_x i + F_y j + F_z k \Rightarrow \vec{F} = |F| . \vec{\lambda}$

$\alpha = ۶۰ \quad \beta = ۴۵ \quad \gamma = ۱۲۰$

$\vec{\lambda} = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$

$= \cos ۶۰ i + \cos ۴۵ j + \cos ۱۲۰ k$

$= ۰/۵ i + ۰/۷۰۷ j - ۰/۵ k$

$$\vec{F} = ۵۰۰\,(۰/۵i + ۰/۷۰۷j - ۰/۵K) = \underbrace{۲۵۰i}_{F_x} + \underbrace{۳۵۴j}_{F_y} - \underbrace{۲۵۰K}_{F_z}$$

مثال: اگر مؤلفه‌های بردار F به شرح زیر معلوم باشد مطلوبست محاسبه زوایای هادی؟

$$\vec{F} = ۲۰i - ۳۰j + ۶۰K$$

$$|F| = \sqrt{۲۰^۲ + (-۳۰)^۲ + ۶۰^۲} = ۷۰$$

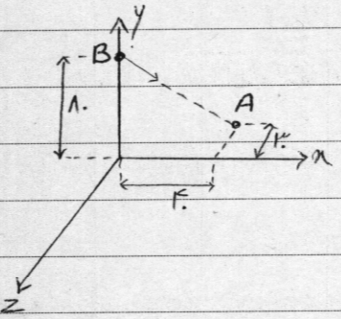
$$F_x = |F|.\cos\alpha \Rightarrow ۲۰ = ۷۰.\cos\alpha \quad \cos\alpha = ۲/۷ \quad \alpha = \mathrm{Arccos}(۲/۷) = ۷۳٫۴$$

$$F_y = |F|.\cos\beta \Rightarrow -۳۰ = ۷۰.\cos\beta \Rightarrow \beta = \mathrm{Arccos}(-۳/۷) = ۱۱۵٫۴ = -۶۴٫۶$$

$$F_z = |F|.\cos\gamma \Rightarrow ۶۰ = ۷۰.\cos\gamma \Rightarrow \gamma = \mathrm{Arccos}(۶/۷) = ۳۱^\circ$$

مثال: در شکل زیر مقدار نیرو ۲۵۰۰N می‌باشد. بردار نیرو از نقطه B به سمت نقطه A می‌باشد. مطلوبست محاسبه مؤلفه‌های برداری و زوایای هادی؟ (۲-۷ ص ۳۰)

A در صفحه zx و B بر روی محور y



$$|F| = ۲۵۰۰N$$

$$A(۴۰, ۰, -۳۰) \quad , \quad B(۰, ۸۰, ۰)$$

$$\vec{F} = |F|.\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{BA}}{|BA|} = \frac{۴۰i - ۸۰j - ۳۰K}{\sqrt{۴۰^۲ + ۸۰^۲ + ۳۰^۲}}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{۴۰i - ۸۰j - ۳۰K}{۹۴٫۳}$$

$$\vec{F} = \frac{۲۵۰۰}{۹۴٫۳} \times (۴۰i - ۸۰j - ۳۰K) = ۱۰۶۰i - ۲۱۲۰j - ۷۹۵K$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|F|} = \frac{۱۰۶۰}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{۱۰۶۰}{۲۵۰۰}\right) = ۶۴٫۹$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-۲۱۲۰}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{-۲۱۲۰}{۲۵۰۰}\right) = ۱۴۸^\circ$$

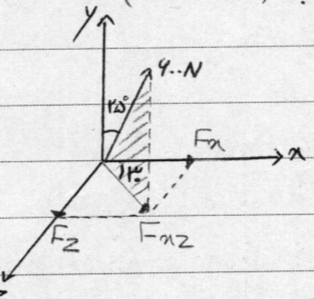
Tamasha

Date : / /

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{|F|} = \frac{-۷۹۵}{۲۵۰۰} \Rightarrow \alpha = ۱۰۸٫۵°$$

تمرین : در مثال قبل مطلوبست محاسبه مؤلفه های بردار و زوایای بردار بر روی سه صفحه $xy$ و $xz$ و $yz$ ؟

مثال : برای نیروی ۶۰۰ نیوتنی نشان داده شده در شکل مطلوبست محاسبه مؤلفه ها در راستای سه محور اصلی و زوایای هادی ؟ (۲-۷۱ صـ۳۲)



$$F_y = ۶۰۰ \cos ۲۵° = ۵۴۳٫۸\ N$$

$F_y$ : تصویر ۶۰۰N روی محور $y$

$۹۰ - ۲۵ = ۶۵°$ ← زاویه نیرو با صفحه $xz$

$$F_{xz} = ۶۰۰ \cos ۶۵ = ۲۵۳٫۶ \quad \text{یا}\ (F\sin ۲۵°)$$

$$F_x = F_{xz}\cos ۳۰ = ۲۵۳٫۶ \cos ۳۰ = ۲۱۹٫۶$$

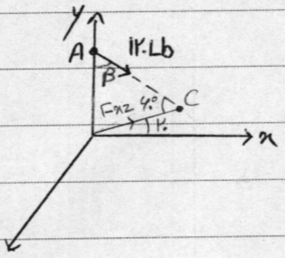
$$F_z = F_{xz}\sin ۳۰ = ۲۵۳٫۶ \sin ۳۰ = ۱۲۶٫۸$$

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{۲۱۹٫۶}{۶۰۰} = ۰٫۳۶۶ \Rightarrow \alpha = \text{Arccos}(۰٫۳۶۶) = ۶۸٫۵۳$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{۱۲۶٫۸}{۶۰۰} = ۰٫۲۱ \Rightarrow \gamma = ۷۷٫۸۷°$$

$$\beta = ۲۵°$$

مثال : راستای نیروی نشان داده شده در شکل زیر از نقطه C در صفحه $xz$ عبور می کند مطلوبست محاسبه مؤلفه های این نیرو و زوایای هادی ؟ (۲-۷۳ صـ۳۲)



$$\beta = ۹۰ - ۶۰ = ۳۰$$

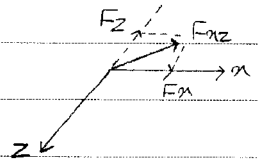
$$F_y = -۱۲۰ \cos ۳۰ = -۱۰۳٫۹$$

$$F_{xz} = ۱۲۰ \sin ۳۰ = ۶۰\ Lb$$

$$F_x = ۶۰ \cos ۲۰ = ۵۶٫۴$$

$$F_z = -۶۰ \sin ۲۰ = -۲۰٫۵$$

Tamasha



$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{۵۶{,}۴}{۱۲۰} = ۰/۴۷$$

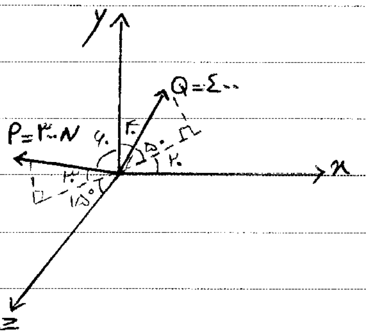
$$\alpha = \operatorname{Arccos}(۰/۴۷) = ۶۱{,}۹۶$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{-۲۰/۵}{۱۲۰} = -۰/۱۷ \Rightarrow \gamma = ۹۹{,}۸$$

مثال: اندازه و جهت برآیند دو نیروی نشان داده شده در شکل را تعیین کنید. (۹۲-۲)

بردار N ۴۰۰ با صفحه xz زاویه ۵۰ درجه می‌سازد

بردار N ۳۰۰ با صفحه xz زاویه ۳۰ درجه می‌سازد



$$P = P_x i + P_y j + P_z K$$

$$P_y = ۳۰۰\cos ۶۰ = ۱۵۰$$

$$P_{xz} = ۳۰۰\cos ۳۰ = ۲۵۹{,}۸$$

$$P_x = -۲۵۹{,}۸\sin ۱۵ = -۶۷{,}۲۴$$

$$P_z = ۲۵۹{,}۸\cos ۱۵ = ۲۵۰{,}۹۵N$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z K$$

$$Q_y = ۴۰۰\cos ۴۰ = ۳۰۶{,}۴ \qquad Q_{xz} = ۴۰۰\cos ۵۰ = ۲۵۷{,}۱$$

$$Q_x = ۲۵۷{,}۱\cos ۲۰ = ۲۴۱{,}۶ \qquad Q_z = -۲۵۷{,}۱\sin ۲۰ = -۸۷{,}۹۳$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-۶۷{,}۲۴ + ۲۴۱{,}۶)\vec{i} + (۱۵۰ + ۳۰۶{,}۴)\vec{j} + (۲۵۰{,}۹۵ - ۸۷{,}۹۳)\vec{K}$$

$$\vec{R} = ۱۷۴{,}۳۶\vec{i} + ۴۵۶{,}۴\vec{j} + ۱۶۳{,}۰۲\vec{K}$$

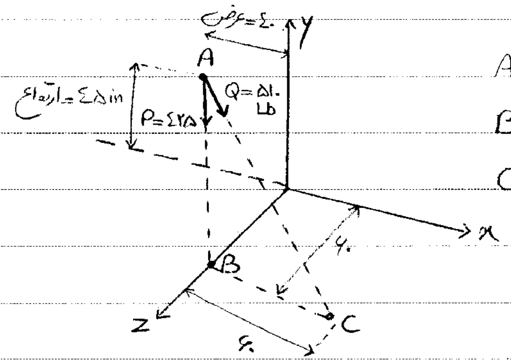
$$|R| = \sqrt{(۱۷۴{,}۳۶)^۲ + (۴۵۶{,}۴)^۲ + (۱۶۳{,}۰۲)^۲} = ۵۱۵N$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{R_x}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۱۷۴{,}۳۶}{۵۱۵}\right) = ۷۰{,}۲۱$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{R_y}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۴۵۶{,}۴}{۵۱۵}\right) = ۲۷{,}۶$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{R_z}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۱۶۳{,}۰۲}{۵۱۵}\right) = ۷۱{,}۵۴^\circ$$

مثال : در شکل زیر مطلوبست محاسبه برآیند دو بردار نیروی اعمال شده به نقطه A ؟ ۹۴-۲)



A در صفحه xy

B,C در صفحه xz

$A(-۴۰, ۴۵, ۰)$

$B(۰, ۰, ۶۰)$

$C(۶۰, ۰, ۶۰)$

$$\vec{P} = |P|\cdot\lambda_P = |P|\cdot\frac{\vec{AB}}{|AB|}$$

$$= ۴۲۵ \times \frac{۴۰\vec{i} - ۴۵\vec{j} + ۶۰k}{\sqrt{۴۰^۲ + ۴۵^۲ + ۶۰^۲}}$$

$$= ۴۲۵/_{۸۵} \times (۴۰i - ۴۵j + ۶۰k)$$

$$= ۲۰۰i - ۲۲۵j + ۳۰۰k$$

$$\vec{Q} = |Q|\cdot\lambda_Q = |Q|\cdot\frac{\vec{AC}}{|AC|} = ۵۱۰ \times \frac{۱۰۰i - ۴۵j + ۶۰k}{\sqrt{۱۰۰^۲ + (۴۵)^۲ + ۶۰^۲}}$$

$$= \frac{۵۱۰}{۱۲۵} \times (۱۰۰i - ۴۵j + ۶۰k) = ۴۰۸i - ۱۸۳,۶j - ۲۴۴,۸K$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (۲۰۰ + ۴۰۸)i + (-۲۲۵ - ۱۸۳,۶)j + (۳۰۰ + ۲۴۴,۸)K$$

$$= ۶۰۸i - ۴۰۸,۶j + ۵۴۴,۸K$$

## تعادل ذره :

برای آنکه یک ذره دارای تعادل باشد باید برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد در مسائل تعادل ذره ابتدا دیاگرام آزاد ذره را رسم می کنیم ، دیاگرام آزاد ذره شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر ذره است سپس برآیند بردارهای نیروی وارده بر ذره را به گونه ای محاسبه می کنیم که برابر صفر شود برای این منظور می توان از روش های مختلف جمع برداری کمک گرفت به طور مثال اگر از روش ترسیمی استفاده می کنیم بردارها را باید به صورت پیاپی به گونه ای رسم کنیم که انتهای آخرین بردار بر ابتدای اولین بردار منطبق شود. اگر

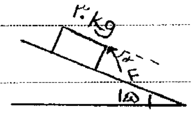
Tamasha

از روش جمع مؤلفه‌ها استفاده می‌کنیم باید از سه معادله تعادل زیر کمک بگیریم

$\Sigma F_x = ۰$ , $\Sigma F_y = ۰$ و $\Sigma F_z = ۰$

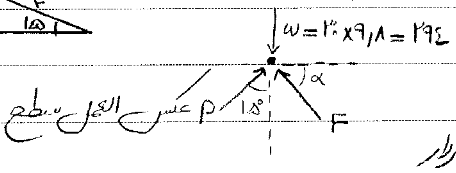
مثال: مطلوبست تعیین اندازه و جهت کوچک‌ترین نیروی F که بسته نشان داده شده در شکل را در حالت تعادل نگه دارد؟ سطح شیب‌دار فاقد اصطکاک می‌باشد

(۵_۲)
ص۲۲

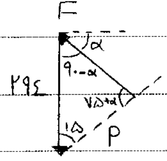


بسته به عنوان یک ذره در نظر گرفته می‌شود

دیاگرام آزاد بسته را رسم می‌کنیم



برآیند سه نیرو باید صفر شود برای این منظور در اینجا با توجه به آنکه تنها سه بردار داریم از روش مثلث استفاده می‌کنیم



با توجه به نامشخص بودن راستای F از مثلث نیروها ضلع سوم مثلث که نشان دهنده نیروی F است به بی‌نهایت شکل قابل ترسیم است اما با توجه به آنکه کم‌ترین مقدار نیروی F مورد نظر است این ضلع باید به گونه‌ای رسم شود که کم‌ترین طول را داشته باشد، کم‌ترین طول وقتی رخ می‌دهد که راستای F بر P عمود باشد

حالا از قانون سینوس‌ها کمک می‌گیریم

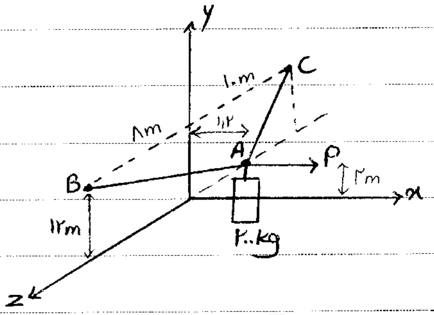
$$۷۵ + \alpha = ۹۰ \Rightarrow \alpha = ۱۵°$$
$$۹۰ - \alpha = ۷۵°$$

$$\frac{۲۹٤}{\sin ۹۰} = \frac{F}{\sin ۱۵} \Rightarrow F = \frac{۲۹٤ \sin ۱۵}{۱} = ۷٦٫۱$$

مثال: استوانه‌ای ۲۰۰ kg از دو کابل AB و AC آویزان است نیروی افقی P عمود بر صفحه yz و هم موازات محور x استوانه را نگه می‌دارد مطلوبست اندازه نیروی P و کشش در هر کابل؟ (کابل‌ها در صفحه yz قرار ندارند) (۲_۹ ص۳۵)

A(۱٫۲, ۲, ۰) — A در صفحه xy
B(۰, ۱۲, ۸) — B و C در صفحه yz
C(۰, ۱۲, -۱۰)

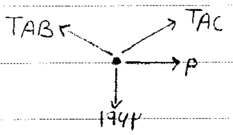
Tamasha



$W = ۲۰۰ \times ۹{,}۸۱ = ۱۹۶۲ \, N$

$\vec{W} = -۱۹۶۲ \vec{j}$

دیاگرام آزاد نقطه A را رسم می‌کنیم



$\Rightarrow \vec{P} = P\vec{i}$

$\vec{T_{AC}} = |T_{AC}| \cdot \lambda_{AC}$

$= |T_{AC}| \times \frac{\vec{AC}}{|AC|} = |T_{AC}| \times \frac{-۱{,}۲\vec{i} + ۱۰\vec{j} - ۱۰\vec{k}}{\sqrt{۱{,}۲^۲ + ۱۰^۲ + ۱۰^۲}}$

$= |T_{AC}| \times \frac{-۱{,}۲\vec{i} + ۱۰\vec{j} - ۱۰\vec{k}}{۱۴{,}۱۹۳}$

$\Rightarrow \vec{T_{AC}} = |T_{AC}| \times (-۰/۰۸۴۵۵\vec{i} + ۰/۷۰۴۶\vec{j} - ۰/۷۰۴۶\vec{k})$

$\vec{T_{AB}} = |T_{AB}| \times \frac{\vec{AB}}{|AB|} = |T_{AB}| \times \frac{-۱{,}۲\vec{i} + ۱۰\vec{j} + ۸\vec{k}}{\sqrt{۱{,}۲^۲ + ۱۰^۲ + ۸^۲}} = |T_{AB}| \times \frac{-۱{,}۲\vec{i} + ۱۰\vec{j} + ۸\vec{k}}{۱۲{,}۸۶۲}$

$= |T_{AB}| \times (-۰/۰۹۳۳\vec{i} + ۰/۷۷۷۵\vec{j} + ۰/۶۲۲\vec{k})$

حال سه معادله تعادل را برای نیرو می‌نویسیم

$\vec{\Sigma F_x} = ۰ \Rightarrow P - ۰/۰۸۴۵۵ \, T_{AC} - ۰/۰۹۳۳ \, T_{AB} = ۰$ ①

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -۱۹۶۲ + ۰/۷۰۴۶ \, T_{AC} + ۰/۷۷۷۵ \, T_{AB} = ۰$ ②

$\Sigma F_z = ۰ \Rightarrow -۰/۷۰۴۶ \, T_{AC} + ۰/۶۲۲ \, T_{AB} = ۰$ ③

③ $\Rightarrow T_{AB} = \frac{۰/۷۰۴۶}{۰/۶۲۲} T_{AC} = ۱{,}۱۳ \, T_{AC}$ ④

④,② $\Rightarrow -۱۹۶۲ + ۰/۷۰۴۶ \, T_{AC} + ۰/۷۷۷۵ \, (۱{,}۱۳ \, T_{AC}) = ۰$

$\Rightarrow -۱۹۶۲ + ۱{,}۵۸ \, T_{AC} = ۰ \Rightarrow T_{AC} = ۱۲۴۲ \, N$ ⑤

⑤,④ $\Rightarrow T_{AB} = ۱{,}۱۳ \times ۱۲۴۲ = ۱۴۰۳ \, N$ ⑥

①,⑤,⑥ $\Rightarrow P - ۰/۰۸۴۵۵ \times ۱۲۴۲ - ۰/۰۹۳۳ \times ۱۴۰۳ = ۰$

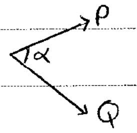
$\Rightarrow P = ۲۳۵{,}۹ \, N$

## ضرب داخلی و خارجی بردارها:

### ضرب داخلی:

ضرب داخلی دو بردار یک عدد می شود و طبق رابطه زیر قابل محاسبه است

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = |P|\cdot|Q|\cdot\cos\alpha$$



$$P = ai + bj + ck \qquad Q = di + ej + Fk \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{Q} = ad + be + cF$$

ضرب داخلی دارای خاصیت جابجایی می باشد $\vec{P}\cdot\vec{Q} = \vec{Q}\cdot\vec{P}$

ضرب داخلی دو بردار وقتی ماکزیمم است که دو بردار موازی هم باشند

وقتی دو بردار عمود بر هم باشند ضرب داخلی آن ها صفر است

### ضرب خارجی:

ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر صفحه ای که دو بردار ضرب شونده با هم تشکیل می دهند

$$\vec{R} = \vec{P}\times\vec{Q} \Rightarrow |R| = |P|\times|Q|\times\sin\alpha$$

ضرب خارجی خاصیت جابجایی ندارد $P\times Q = -Q\times P$

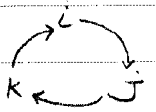
برای تعیین جهت بردار نتیجه از قانون دست راست کمک می گیریم به گونه ای که انگشت شصت در راستای بردار اول و انگشت اشاره در راستای بردار دوم قرار گیرد حال انگشت وسط نشان دهنده جهت بردار نتیجه خواهد بود

$$P\times Q = (ai + bj + ck)\times(di + ej + fk)$$
$$= (ae)k - (af)j - (bd)k + (bf)i + (cd)j - (ce)i$$

$i\times i = 0 \quad j\times j = 0 \quad k\times k = 0$

$i\times j = k \quad j\times i = -k \quad j\times k = i$

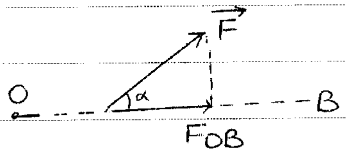
$k\times j = -i \quad i\times k = -j \quad k\times i = j$



Tamasha

$$\vec{R} = P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

محاسبه تصویر یک بردار بر روی یک راستای خاص:



$$|F_{OB}| = |F| \cdot \cos\alpha$$

$$\vec{F}_{OB} = |F_{OB}| \cdot \lambda_{OB} = |F_{OB}| \times \frac{\vec{OB}}{|OB|}$$

اگر زاویه α موجود نباشد از ضرب داخلی برای محاسبه این زاویه کمک می گیریم

$$\vec{OB} \cdot \vec{F} = |OB| \cdot |F| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{F}}{|OB| \cdot |F|} = \vec{\lambda}_{OB} \cdot \vec{\lambda}_F$$

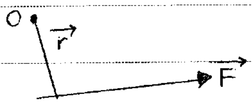
$$(F_{OB} = F \cdot \lambda_{OB})$$

گشتاور:

کمیتی است برداری که تمایل به چرخاندن جسم حول نقطه یا محوری خاص را دارد
گشتاور با توجه به جهت چرخشی که ایجاد می کند می تواند به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد تعریف شود به طور قراردادی گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی فرض می شود

گشتاور یک نیرو حول نقطه ای خاص:

برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک نقطه، از آن نقطه به نقطه ای دلخواه در راستای نیرو، بردار $\vec{r}$ را رسم می کنیم ابتدای این بردار بر نقطه مورد نظر و انتهای آن بر راستای نیرو قرار می گیرد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ در بردار نیرو برابر بردار گشتاور خواهد شد



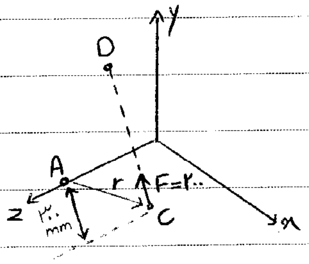
$$M_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

برای تشخیص جهت بردار گشتاور همانند حالت گفته شده در ضرب خارجی بردارها می‌توان از قانون دست راست کمک گرفت

برای تشخیص بردار گشتاور به شکل زیر نیز می‌توان از دست راست کمک گرفت در این حالت ابتدا باید تشخیص دهیم که گشتاور ساعتگرد است یا پادساعتگرد آنگاه دست راست را به نحوی قرار می‌دهیم که چهار انگشت در جهت چرخش گشتاور باشد در این حالت انگشت شصت نشان دهنده جهت بردار گشتاور خواهد بود

مثال: در شکل زیر به نقطه C نیروی ۲۰۰N اعمال می‌شود راستای این نیرو از نقطه d عبور می‌کند مطلوبست محاسبه گشتاور این نیرو حول نقطه A. (۳-۴ ص ۵۱)

C در صفحه xz
D در صفحه yz
A بر روی محور z



C(۳۰۰, ۰, ٤۰۰)
A(۰, ۰, ۳۲۰)
D(۰, ۲٤۰, ۸۰)

در ابتدا نیروی وارده را به صورت یک بردار نیرو می‌نویسیم

$$\vec{F} = |F| \times \frac{\vec{CD}}{|CD|} = ۲۰۰ \times \frac{-۳۰۰i + ۲٤۰j - ۳۲۰K}{\sqrt{۳۰۰^۲ + ۲٤۰^۲ + ۳۲۰^۲}} = ۲۰۰ \times \frac{-۳۰۰i + ۲٤۰j - ۳۲۰K}{۵۰۰}$$

$$= -۱۲۰i + ۹۶j - ۱۲۸K$$

حالا بردار $\vec{r}$ را رسم می‌کنیم. ابتدای $\vec{r}$ روی نقطه A قرار می‌گیرد و انتهای آن بر نقطه‌ای دلخواه در راستای نیروی $\vec{F}$. به طور مثال انتها را می‌توان بر روی یکی از دو نقطه C,D اختیار کرد در اینجا از نقطه C کمک می‌گیریم

$$\vec{r} = \vec{AC} = ۳۰۰i + ۸۰K$$

$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F} = (۳۰۰i + ۸۰K) \times (-۱۲۰i + ۹۶j - ۱۲۸K)$$

$$= (۳۰۰ \times ۹۶)\vec{K} + (۳۰۰ \times ۱۲۸)j - (۸۰ \times ۱۲۰)j - (۸۰ \times ۹۶)i =$$

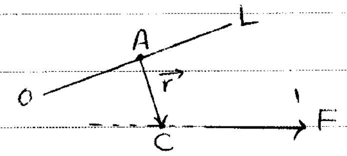
Tamasha

$$-۷۶۸۰\vec{i} + ۲۸۸۰۰\vec{j} + ۲۸۸۰۰\vec{k} \quad N.mm$$

$$|M_A| = \sqrt{۷۶۸۰^۲ + ۲۸۸۰۰^۲ + ۲۸۸۰۰^۲} = ۴۱۴۴۷ \ N.mm = ۴۱٫۴۴۷ \ N.m$$

### گشتاور یک نیرو حول محوری مفروض:

گشتاور یک نیرو حول یک محور برابر یک عدد می‌شود در این حالت بردار گشتاور هم موازات همان محور مورد نظر است برای محاسبه بزرگی بردار گشتاور نقطه‌ای دلخواه بر محور مورد نظر را انتخاب می‌کنیم و سپس گشتاور نیرو حول آن نقطه دلخواه را مطابق روش گفته شده در قسمت قبل محاسبه می‌کنیم در انتها بردار گشتاور بدست آمده را در بردار یکه محور مورد نظر ضرب داخلی می‌کنیم



$$\vec{M_A} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M_{OL}} = \vec{\lambda_{OL}} \cdot \vec{M_A} = \vec{\lambda_{OL}} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

نکته: اگر راستای نیرو و راستای محور باهم متقاطع باشند گشتاوری ایجاد نمی‌شود

مثال: در مثال قبل مطلوبست محاسبه گشتاور حول محور $\vec{AB}$؟ $B(۱۰۰،۰،۰)$

$$\vec{\lambda_{AB}} = \frac{\vec{AB}}{|AB|} = \frac{۱۰۰i - ۳۲۰K}{\sqrt{۱۰۰^۲ + ۳۲۰^۲}} = ۰/۳i - ۰/۹۶K$$

$$M_{AB} = \lambda_{AB} \cdot (M_A)$$

لازم است که گشتاوری دارد حول نقطه دلخواه در راستای AB محاسبه شود که در مثال قبلی این کار برای نقطه A انجام شده و می‌توان از آن استفاده کرد

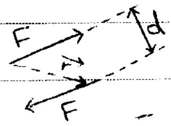
$$M_{AB} = (۰/۳i - ۰/۹۶K) \cdot (-۷۶۸۰i + ۲۸۸۰۰j + ۲۸۸۰۰K)$$

$$= ۰/۳(-۷۶۸۰) - ۰/۹۶ \times ۲۸۸۰۰ = -۲۹۹۵۲ \ N.mm$$

منفی بودن علامت نشانه آنست که گشتاور حول محور مورد نظر ساعتگرد است

Tamasha

## کوپل نیرو:



دو نیروی مساوی، موازی و غیر هم جهت را کوپل می‌گویند

گشتاور یک کوپل نیرو حول هر نقطه دلخواه در صفحه مقداری ثابت است

و مقدار آن برابر حاصل ضرب مقدار نیرو در فاصله عمودی دو نیرو است $M = F.d$

و با اینکه می‌توان بر امتداد یکی از دو نیرو نقطه ای را انتخاب کرد و همچنین به طور مشابه بر امتداد نیروی دوم نیز نقطه ای انتخاب کرد و با وصل این دو نقطه به هم بردار $\vec{r}$ را تشکیل داد، ضرب خارجی بردار $\vec{r}$ x بردار نیرو تشکیل بردار گشتاور را می‌دهد $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

(بردار F، برداری است که ابتدای بردار $\vec{r}$ بر روی آن قرار گیرد)

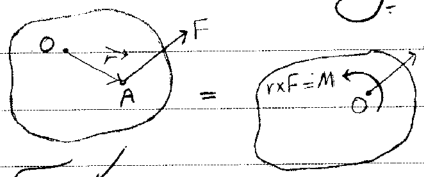
## کوپل های هم ارز:

دو کوپل با هم هم ارزند وقتی که بردارهای گشتاوری که ایجاد می‌کنند با هم یکسان باشند

## جمع کردن کوپل ها:

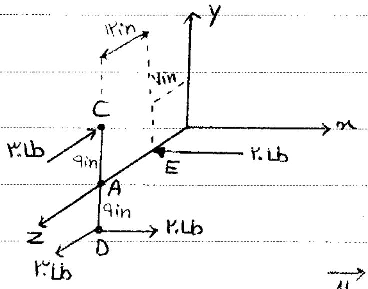
با توجه به اینکه هر کوپل می‌تواند با یک بردار گشتاور نمایش داده شود کوپل ها را می‌توان طبق قوانین جمع برداری با هم جمع کرد

## تجزیه نیروی مفروض به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل:



به همین شکل اگر بیش از یک نیرو به جسم وارد شود همه نیروها را می‌توان با یک نیرو و یک گشتاور در نقطه مورد نظر جایگزین کرد به گونه ای که یک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم می باشد و بردار گشتاور نیز برابر گشتاوری است که نیروهای وارد بر جسم حول نقطه مورد نظر ایجاد می‌کند

مثال: مطلوبست محاسبه برآیند دو کوپل ناشی از دو نیروی در شکل زیر؟ (۳_۶۳ ص ۷۱)



$$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2}$$

$\vec{M_1}$: ناشی از دو نیروی ۲۰Lb

$\vec{M_2}$: 〃 〃 〃 ۳۰Lb

برای بردار $M_1$، بردار $\vec{r}$ را از نقطه E تا نقطه D در نظر می‌گیریم

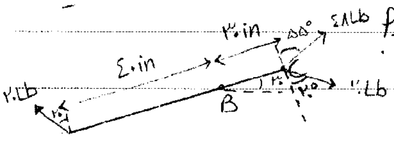
$$\vec{M_1} = (-9j + 12k) \times 20i = 180k + 240j$$

برای بردار $M_2$ ابتدای بردار $\vec{r}$ را بر روی نقطه C و انتهای آن را بر D فرض می‌کنیم

$$\vec{M_2} = -18j \times 30k = -540i$$

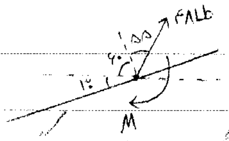
$$\Rightarrow \vec{M_1} + \vec{M_2} = -540i + 240j + 180k$$

مثال: در شکل زیر: الف) سه نیروی نشان داده را با سیستم نیرو-کوپل معادل در نقطه B جایگزین کنید؟ ب) یک نیروی معادل با سیستم نیرو-کوپل بدست آمده در قسمت الف را تعیین کنید و نقطه اثر آن را روی راستای ABC مشخص کنید؟



دو نیروی ۲۰Lb تشکیل یک کوپل می‌دهند

با توجه به اینکه دو نیروی ۲۰Lb موازی و خلاف جهت هستند همدیگر را خنثی می‌کنند و برآیند نیرو در نقطه B همان نیروی ۴۸Lb است



گشتاور M دو بخش است یکی ناشی از کوپل دو نیروی ۲۰Lb و دیگری ناشی از انتقال نیروی ۴۸Lb حول نقطه B

$$M = M_1 + M_2$$

$$M_1 = -20 \times 70 \sin(90+20) = -1316 \text{ Lb-in}$$

$$M_2 = 48 \times 30 \sin(90+55) = 826 \text{ lb-in}$$

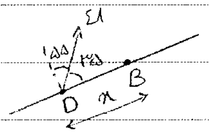
$$M = -1316 + 826 = -490 \text{ Lb-in}$$

چون منفی بدست آمده است گشتاور ساعتگرد است ←

ب) می‌خواهیم بر راستای AC نقطه‌ای را پیدا کنیم که در آن نقطه فقط یک تک نیرو جایگزین شود، آن تک نیرو برابر برآیند نیروهای وارد بر سیستم است، برآیند نیروها در قسمت

Tamasha

قبلی برابر 48lb محاسبه شد



این تک نیرو باید در نقطه‌ای قرار گیرد که گشتاور ناشی از آن حول نقطه B به صورت ساعتگرد و برابر مقدار محاسبه شده در مرحله قبل باشد به همین جهت محل اثر تک نیرو باید در پایین نقطه B باشد

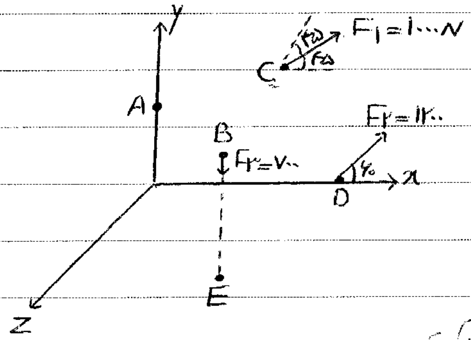
گشتاور نیرو حول نقطه B را محاسبه و با مقدار مرحله قبل مساوی قرار می‌دهیم

$$-48x\sin 125 = -490$$

$$x = \frac{490}{48\sin 125} = 17{,}8\,in$$

(۳-۸۹ ص ۷۶)

مثال: به جای سه نیروی نشان داده شده در شکل زیر یک سیستم نیرو-کوپل هم ارز در نقطه A قرار دهید. (۳-۱۰۱ ص ۸۳)



D(۱۰۰,۰,۰)
A(۰,۱۰۰,۰)
C(۷۵,۱۰۰,-۵۰)
B(۷۵,۱۰۰,۵۰)
E(۱۵۰,-۵۰,۱۰۰)

1200N در صفحه xy

1000N در صفحه به موازات xz

واحد: N.mm

ابتدا سه بردار نیرو را به صورت برداری در می‌آوریم

$$\vec{F_1} = F_{1x}i + F_{1z}k = 1000\cos 45\,i - 1000\sin 45\,k = 707i - 707k$$

$$\vec{F_2} = F_{2x}i + F_{2y}j = 1200\cos 60\,i + 1200\sin 60\,j = 600i + 1039j$$

$$\vec{F_3} = |F_3|\cdot\lambda_{\vec{BE}} = 700\times\frac{\vec{BE}}{|BE|} = 700\times\frac{75i - 150j + 50k}{\sqrt{75^2+150^2+50^2}} = 300i - 600j + 200k$$

حال برآیند سه بردار فوق را محاسبه می‌کنیم

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$$

$$= 1607i + 439j - 507k$$

حال باید گشتاور هر یک از سه نیرو حول نقطه A را محاسبه کرده و با هم جمع کنیم برای این منظور، برای هر نیرو بردار R را از نقطه A تا ابتدای نیرو ترسیم می‌کنیم

$\vec{M_1} = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F_1} = (۷۵i - ۵۰k) \times (۷۰۷i - ۷۰۷k) \qquad \vec{r}_{C/A} = \vec{AC}$

$= (۷۵ \times ۷۰۷)j + (۵۰ \times ۷۰۷)j = ۱۷۶۷۵\,j$

$\vec{M_2} = \vec{r}_{D/A} \times \vec{F_2} = (۱۰۰i - ۱۰۰j) \times (۶۰۰i + ۱۰۳۹j) = ۱۰۳۹۰۰k + ۶۰۰۰۰k = ۱۶۳۹۰۰k$

$\vec{M_3} = \vec{r}_{B/A} \times \vec{F_3} = (۷۵i + ۵۰k) \times (۲۰۰i - ۶۰۰j + ۲۰۰k)$

$= (-۷۵ \times ۶۰۰)k - (۷۵ \times ۲۰۰)j + (۵۰ \times ۲۰۰)j + (۵۰ \times ۶۰۰)i$

$= ۳۰۰۰۰i - ۴۵۰۰۰k$

$\vec{M} = \vec{M_1} + \vec{M_2} + \vec{M_3} = (۳۰۰۰۰i + ۱۷۶۷۵j + ۱۱۸۹۰۰k) \; N.mm$

تعادل اجسام صلب:

جسم صلب جسمی است که در اثر اعمال نیرو شکل کلی خود را از دست نمی‌دهد و ابعاد و اندازه‌های آن قبل و بعد از اعمال نیرو ثابت است

روش حل مسائل تعادل اجسام صلب:

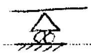
همانند مسائل تعادل ذره در اینجا نیز دیاگرام آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود و با نوشتن معادلات تعادل مقادیر مجهول محاسبه می‌شود. معادلات تعادل برای مسائل دو بعدی و سه بعدی به شرح زیر است:

دو بعدی $\begin{cases} \Sigma F_x = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ \\ \Sigma M = ۰ \end{cases}$

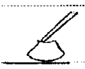
سه بعدی $\begin{cases} \Sigma F_x = ۰ \\ \Sigma F_y = ۰ \\ \Sigma F_z = ۰ \\ \Sigma M_x = ۰ \\ \Sigma M_y = ۰ \\ \Sigma M_z = ۰ \end{cases}$

انواع تکیه‌گاه:

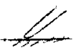
۱) تکیه‌گاه غلطکی



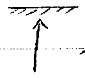
۲) گهواره‌ای



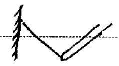
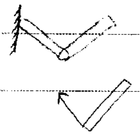
۳) جسم بر روی سطح بدون اصطکاک



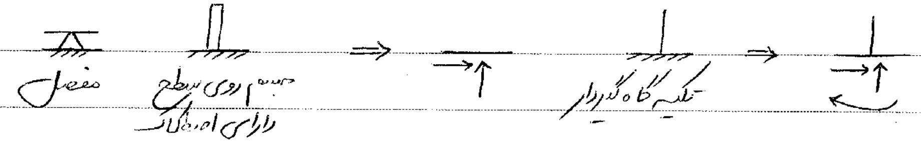
واکنش:



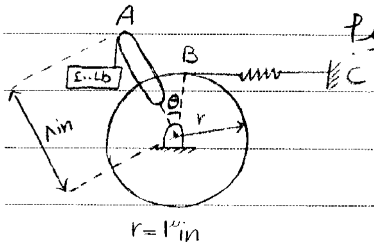
نیرو با خط اثر معلوم

کابل ⇐  ⇐ میله 

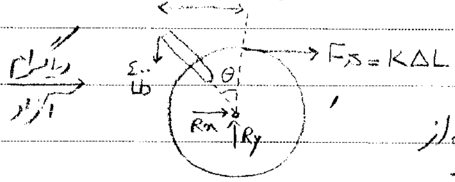
⇐ نیروی داخلی اعضا لزوماً (به موازات کابل یا میله)


مفصل
جسم روی سطح دارای اصطکاک
تکیه‌گاه گیردار

مثال: وزنه‌ای به وزن ۴۰۰ پوند به نقطه A از اهرم نشان داده شده در شکل متصل است. ثابت فنر BC عبارت است از $K = ۲۵۰\ lb/in$ و وقتی θ مساوی صفر است فنر کشیده نشده، وضعیت تعادل این سیستم را تعیین کنید؟


A
B
C
۴۰۰ Lb
۸ in
θ
r
r = ۳ in

نمودار آزاد اهرم و استوانه را ترسیم می‌کنیم


دیاگرام آزاد
۸ sinθ
۴۰۰ Lb
θ
$F_s = K\Delta L$
$R_x$
$R_y$

ΔL برابر طول قوسی از دایره با زاویه θ می‌باشد

$\Delta L = r\theta = ۳\theta$

$\curvearrowleft \sum M_o = ۰ \Rightarrow ۴۰۰ \times ۸ \sin\theta - (۲۵۰ \times ۳\theta) \times ۳ = ۰$ θ برحسب رادیان

$\Rightarrow ۳۲۰۰ \sin\theta = ۲۲۵۰\,\theta$

$\sin\theta = ۰/۷۰۳\,\theta$

معادله بالا را به روش سعی و خطا حل می‌کنیم θ = ۰ جواب اول

$۰ < \theta < \pi/۲$

هرگاه حاصل کسر به عدد یک نزدیک شد عدد فرض شده می‌تواند جواب مسأله باشد

$\theta = ۰/۵ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{۰/۷۰۳\theta} = ۱/۳۶$

$\theta = ۱ \Rightarrow \frac{\sin\theta}{۰/۷۰۳\theta} = ۱/۲$

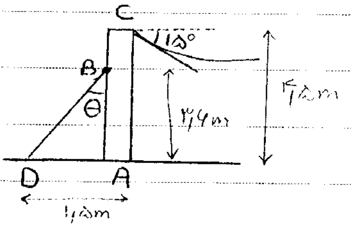
$\theta = ۱/۵ \Rightarrow ۰/۹۵$

$\theta = ۱/۴ \Rightarrow ۱/۰۰۱ \Rightarrow \theta = ۱/۴\ Rad = ۸۰/۲۵^\circ$

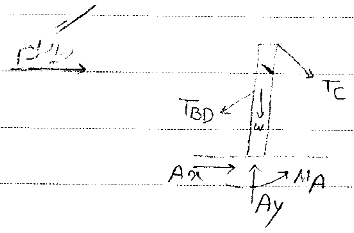
(۲-۵ ص ۱۰۶)

Tamasha

مثال: تیر برقی به جرم 175 kg مفروض است. سیم برق در نقطه C به آن تکیه دارد. کشش در سیم 600 N است و سیم در نقطه C با افق زاویه ۱۵ درجه دارد. مطلوب است تعیین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین کشش مجاز در کابل BD بطوریکه اندازه کوپل وارد در نقطه A از 500 N.m تجاوز نکند؟ (۴-۴۳ ص ۱۱۳)



دیاگرام آزاد تیر برق را رسم می‌کنیم



$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{۱٫۵}{۳٫۶}\right) = ۲۲٫۶$$

$$M_A \leqslant ۵۰۰ \text{ N.m}$$

$$W = ۱۷۵ \times ۹٫۸۱ = ۱۷۱۷ \text{ N}$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow M_A + T_{BD} \times ۳٫۶ \times \sin ۲۲٫۶ - T_C \times ۴٫۵ \cos ۱۵ = ۰$$

$$M_A + ۱٫۳۸ T_{BD} - ۴٫۳۴ T_C = ۰$$

$$M_A = ۴٫۳۴ T_C - ۱٫۳۸ T_{BD} = ۴٫۳۴ \times ۶۰۰ - ۱٫۳۸ T_{BD}$$

$$M_A = ۲۶۰۴ - ۱٫۳۸ T_{BD} \Rightarrow T_{BD} = \frac{۲۶۰۴ - M_A}{۱٫۳۸} = \frac{۲۶۰۴ - ۵۰۰}{۱٫۳۸}$$

$$\Rightarrow T_{BD} = ۱۵۲۵ \text{ N} = T_{min}$$

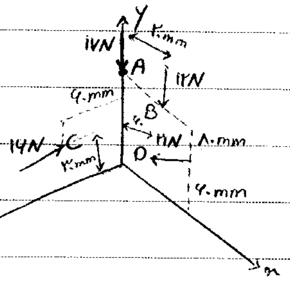
در صورت سؤال مشخص نشده است که گشتاور A ساعتگرد است یا پادساعتگرد بنابراین باید هر دو حالت را برای آن فرض کنیم در اینجا بار اول فرض شد که این گشتاور پادساعتگرد است یک بار دیگر مسئله را برای حالتی حل می‌کنیم که گشتاور ساعتگرد است که در معادله اگر به جای $M_A$، ۵۰۰- قرار دهیم

$$M_A = -۵۰۰$$

$$\Rightarrow T_{BD} = \frac{۲۶۰۴ - (-۵۰۰)}{۱٫۳۸} = ۲۲۵۰ \text{ N} = T_{max}$$

مثال: به جای زوجهای ثابت داده شده در شکل یک سیستم نیرو-کوپل در نقطه C قرار دهید؟

Tamasha


y
۱۷N
A
۲۰mm
۱۲N
۶۰mm
B
۲۰
۱۶N
C
۲۱N
۸۰mm
۳۰mm
D
۶۰mm
z
x

| | |
|---|---|
| $A(۰,۱۴۰,۰)$ | B و D در صفحه xy |
| $B(۲۰,۱۴۰,۰)$ | C در صفحه yz |
| $C(۰,۳۰,۶۰)$ | |
| $D(۶۰,۶۰,۰)$ | |

ابتدا برآیند نیروها را بدست می‌آوریم

$$\vec{R} = -۱۷j - ۱۲j - ۲۱i - ۱۶k$$

$$\vec{R} = -۲۱i - ۲۹j - ۱۶k$$

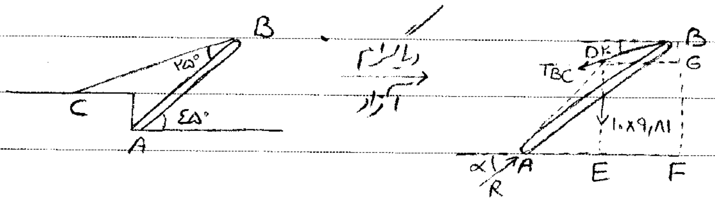
حال گشتاور این چهار نیرو را نسبت به نقطه C محاسبه می‌کنیم. گشتاور نیروی ۱۶N صفر است

$$\vec{M_C} = r_{A/C} \times (-۱۷j) + r_{B/C} \times (-۱۲j) + r_{D/C} \times (-۲۱i)$$

$$= (۱۱۰j - ۶۰k)(-۱۷j) + (۲۰i + ۱۱۰j - ۶۰k)(-۱۲j) + (۶۰i + ۳۰j - ۶۰k)(-۲۱i)$$

$$= -۱۰۲۰i - ۲۴۰k - ۷۲۰i + ۶۳۰k + ۱۲۶۰j = -۱۷۴۰i + ۱۲۶۰j + ۳۹۰k \quad N\cdot mm$$

مثال: در شکل روبرو قطعه AB، ۱۰kg وزن و طول آن ۴m است این قطعه با طناب BC نگهداری شده است مطلوبست تعیین کشش طناب و واکنش نقطه A ! (۴_۶ ص ۱۱۵)


B
۲۵°
C
۴۵°
A
دیاگرام آزاد
D
B
G
T_BC
۱۰×۹٫۸۱
α
A
R
E
F

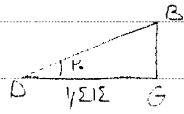
قطعه AB یک جسم سه نیرویی است شرط تعادل جسم سه نیرویی آنست که برآیند نیروها صفر شود و راستای سه نیرو نیز از یک نقطه عبور کند

مثلث متساوی الساقین $AF = BF = AB\cos ۴۵$

$$= ۴\cos ۴۵ = ۲٫۸۲۸\,m$$

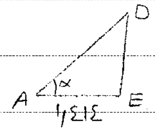
$$DG = EF = \frac{AF}{۲} = ۱٫۴۱۴$$

Tamasha



$$\tan ۲۰ = \frac{BG}{۱٫۴۱۴} \Rightarrow BG = ۱٫۴۱۴ \tan ۲۰ = ۰٫۵۱۵\,m$$

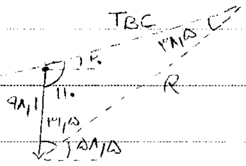
$\overset{\triangle}{ADE}$ :



$$DE = BF - BG = ۲٫۸۲۸ - ۰٫۵۱۵ = ۲٫۳۱۳$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۲٫۳۱۳}{۱٫۴۱۴}\right) = ۵۸٫۵°$$

با بدست آوردن زاویه α حال مثلث نیروها را رسم می‌کنیم، برای این منظور بردار نیروها را بصورت متوالی رسم می‌کنیم

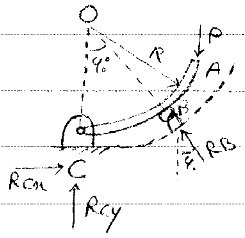


$$\frac{۹۸٫۱}{\sin ۳۸٫۵} = \frac{T_{BC}}{۳۱٫۵} = \frac{R}{\sin ۱۱۰}$$

$$T_{BC} = \frac{۹۸٫۱ \sin ۳۱٫۵}{\sin ۳۸٫۵} = ۸۲٫۳۲۳\,N$$

$$R = \frac{۹۸٫۱ \sin ۱۱۰}{\sin ۳۸٫۵} = ۱۴۸\,N$$

مثال: در شکل زیر مطلوبست تعیین واکنش در نقطه B و نقطه C ؟ (۴-۸۲ ص ۱۱۸)



CBA : کمان دایره

تکیه‌گاه B غلطکی و دارای یک واکنش در راستای مرکز دایره

تکیه‌گاه C مفصلی و دارای دو واکنش است

برای گرفتن گشتاور RB با توجه به آنکه راستای نیرو از مرکز دایره عبور می‌کند نیرو را در فاصله مرکز دایره تا نقطه C (شعاع دایره) در sin زاویه راستای نیرو و راستای خط رابط ضرب می‌کنیم

$$\circlearrowleft \Sigma M_C = ۰ \Rightarrow -P.R + R_B.R.\sin ۶۰ = ۰$$

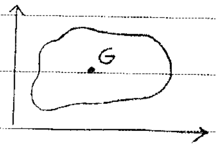
$$\Rightarrow R_B = \frac{P.R}{R \sin ۶۰} = \frac{P}{\sin ۶۰} = ۱٫۱۵P$$

$$\overrightarrow{\Sigma F_x} = ۰ \Rightarrow R_{Cx} - (۱٫۱۵P)\sin ۶۰ = ۰$$

$$R_{Cx} = P$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow R_{cy}-P+1.15P\cos 60=0 \Rightarrow R_{cy}=0.425P$$

## مراکز سطوح:



$G(\bar{x},\bar{y})$

$Q_x$: گشتاور اول سطح شکل حول محور $x$

$Q_y$: 〃 〃 〃 〃 $y$

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{\int dA}=\frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{\int dA}=\frac{Q_x}{A}$$

اشکالی که دارای مرکز تقارن هستند مرکز سطح آن‌ها روی مرکز تقارنشان می‌باشد

شکل‌هایی که مرکز تقارن ندارند اما محور تقارن دارند مرکز سطح آن‌ها روی این محور تقارن است

## مرکز سطح برخی اشکال خاص:

برای برخی اشکال خاص، انتگرال‌های بالا محاسبه شده و مختصات مرکز سطح آن‌ها به صورت پارامتری بدست آمده که برای این اشکال می‌توان با مراجعه به جداول مختصات مرکز سطح را بدست آورد

## محاسبه مرکز سطح برای اشکال مرکب:

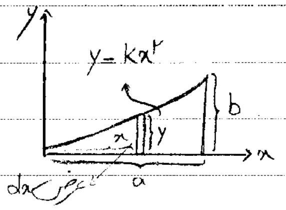
برای اشکال مرکب می‌توان آن‌ها را به چند شکل ساده تقسیم نموده و برای هر شکل ساده مساحت و مختصات مرکز سطح را در یک دستگاه مختصات ثابت تعیین کرد سپس با استفاده از روابط زیر می‌توان مختصات مرکز سطح شکل مرکب را تعیین کرد

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i x_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y}=\frac{\sum A_i y_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i}$$

$x_i, y_i$: مختصات مرکز سطح شکل iام

$A_i$: مساحت شکل iام

مثال: مطلوبست تعیین مختصات مرکز سطح منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر. (۵-۴ ص ۱۴۸)



محاسبه K

به ازای $x=a$ داریم: $y=b$

$$\Rightarrow b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

ابتدا مساحت شکل را با انتگرال گیری محاسبه می‌کنیم

یک المان عمودی در شکل در نظر می‌گیریم

$$A=\int dA=\int y\,dx$$

$$=\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2\,dx=\left[\frac{b}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{3}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^a x\times\frac{bx^2}{a^2}\,dx=\int \frac{b}{a^2}x^3\,dx=\left[\frac{bx^4}{4a^2}\right]_0^a=\frac{ba^2}{4}$$

$$\Rightarrow \bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{ba^2/4}{ab/3}=\frac{3a}{4}$$

در انتگرال زیر با توجه به اینکه نقاط مختلف المان عمودی y های متفاوتی دارند باید مقدار y در مرکز سطح المان مستطیلی را در نظر گرفت

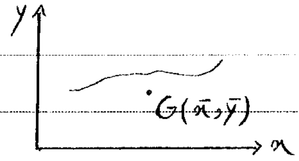
$$Q_x=\int y\,dA=\int_0^a\left[\frac{b}{2a^2}x^2\right]\left[\frac{b}{a^2}x^2\,dx\right]$$

$$=\int_0^a\frac{b^2}{2a^4}x^4\,dx=\left[\frac{b^2}{10a^4}x^5\right]_0^a=\frac{b^2a}{10}$$

$$\left(y/2=\frac{b}{2a^2}x^2\right)$$

$$\Rightarrow \bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{b^2a/10}{ab/3}=\frac{3b}{10}$$

محاسبه مراکز خطوط (منحنی‌ها):



$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}=$$

s: طول منحنی

$$\bar{y}=\frac{\int y\,ds}{\int dx}$$

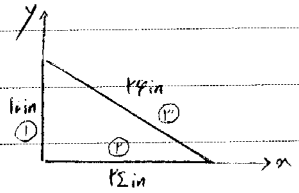
همانند سطوح مرکب در منحنی‌های مرکب نیز می‌توان از روابط مشابه استفاده کرد

$$\bar{x}=\frac{\sum S_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n}S_i}$$

$$\bar{y}=\frac{\sum S_i y_i}{\sum S_i}$$

Tamasha

مثال: مثلث نشان داده شده در شکل از سیم نازک و همگن ساخته شده مختصات مرکز گرانی آن را تعیین کنید؟ (۲-۵ ص۱۴۱)



یک دستگاه مختصات به صورت اختیاری به گونه ای تعیین می کنیم که مبدا آن گوشه پایین سمت چپ مثلث باشد

مثلث را به سه خط تجزیه می کنیم و برای هر خط طول و مختصات مرکز گرانی آن را تعیین می کنیم، با توجه به اینکه اضلاع مثلث از سیم همگن ساخته شده مرکز گرانی هر خط در وسط آن قرار می گیرد

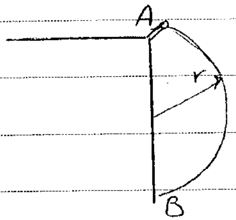
شکل ① : $S_1=10$ , $\bar{x}_1=0$ و $\bar{y}_1=5$

شکل ② : $S_2=24$ $\bar{x}_2=12$ $\bar{y}_2=0$

شکل ③ : $S_3=26$ $\bar{x}_3=12$ $\bar{y}_3=5$

$$\bar{x}=\frac{\Sigma S_i x_i}{\Sigma S_i}=\frac{10\times 0+24\times 12+26\times 12}{10+24+26}=10\,in \qquad \bar{y}=\frac{10\times 5+24\times 0+26\times 5}{10+24+26}=3\,in$$

مثال: میله ای یکنواخت به شکل نیم دایره به وزن W و شعاع r به پین A متصل است و به سطح بی اصطکاک تکیه دارد واکنش های تکیه گاهی A و B را تعیین کنید؟ (۳-۵ ص۱۴۲)

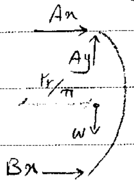


دیاگرام آزاد نیم دایره را رسم می کنیم

تکیه گاه A که پین است دو واکنش افقی و عمودی دارد و تکیه گاه B که سطح بدون اصطکاک است یک واکنش عمود بر سطح یعنی بصورت افقی دارد

وزن نیم دایره به مرکز گرانی آن وارد می شود

مرکز گرانی نیم دایره توخالی به فاصله $2r/\pi$ از مرکز دایره قرار می گیرد



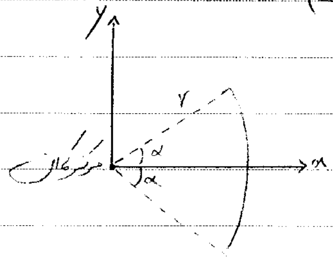
$$\uparrow \Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y-W=0 \quad A_y=W$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_A=0 \quad -W\times\frac{2r}{\pi}+B_x\times 2r \Rightarrow B_x=\frac{W}{\pi}$$

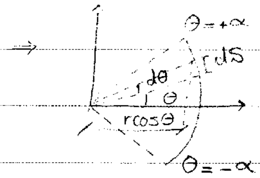
$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow \frac{W}{\pi}+A_x=0 \Rightarrow A_x=-W/\pi \qquad \overleftarrow{A_x=W/\pi}$$

Tamasha

مثال: مطلوبست تعیین مختصات مرکز گرانی کمان نمایش داده شده در شکل زیر. (کمان بصورت توخالی می باشد) (مثال ۵-۵ ص ۱۴۹)



چون شکل نسبت به محور x متقارن است مقدار $\bar{y}$ آن صفر است



$$S=\int ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\,d\theta=\left[r\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}=(r\alpha-(-r\alpha))=۲r.\alpha \Rightarrow$$ اندازه طول قوس

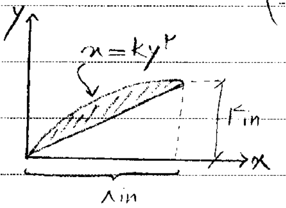
$$\int x\,ds=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r\cos\theta\times(r\,d\theta)=\int_{-\alpha}^{+\alpha} r^{۲}\cos\theta\,d\theta=r^{۲}\left[\sin\theta\right]_{-\alpha}^{+\alpha}=r^{۲}\left[\sin\alpha-(\sin(-\alpha))\right]$$

$$=۲r^{۲}\sin\alpha$$

α: برحسب رادیان

$$\bar{x}=\frac{\int x\,ds}{\int ds}=\frac{۲r^{۲}\sin\alpha}{۲r.\alpha}=\frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$$

مثال: مطلوبست محاسبه مرکز سطح شکل زیر. (ص ۱۴۴)



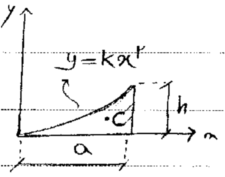
محاسبه K:

$$x=۸ \Rightarrow y=۴ \Rightarrow ۸=k\times ۴^{۲}$$

$$k=۰/۵$$

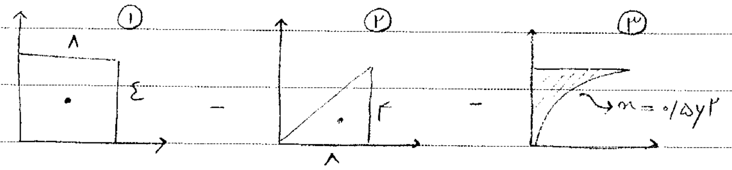
برای محاسبه مرکز سطح از جدول کمک می گیریم

مطابق جدول برای زیر منحنی سهموی داریم



$$A=\frac{ah}{۳} \quad \bar{x}=\frac{۳}{۴}a \quad \bar{y}=\frac{۳}{۱۰}h$$

در شکل بالا نسبت به شکل صورت مسئله منحنی سهموی ۹۰ درجه چرخیده است یا به بیان دیگر جای x و y با هم عوض شده است. غیر از آن در شکل بالا قسمت هاشور خورده در زیر خم منحنی است اما در شکل صورت سوال قسمت هاشور خورده در بالای خم منحنی است می توان شکل را بصورت زیر تفکیک کرد:



① شکل : $a_1 = 32 \quad \bar{x}_1 = 4 \quad \bar{y}_1 = 2$

② شکل : $A_2 = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \quad \bar{x}_2 = \frac{2}{3} \times 8 = 5.33 \quad \bar{y} = \frac{4}{3} = 1.33$

در مورد مثلث اگر فاصله مرکز سطح از رأس مثلث محاسبه شود از ضریب ۲/۳ و اگر از قاعده مثلث محاسبه شود از ضریب ۱/۳ استفاده می‌کنیم

③ شکل : $A_3 = \frac{4 \times 8}{3} = 10.66$

برای سهمی با توجه به آنکه منحنی بر حسب توان دوم y است و نه x (جای x و y عوض شده) مقدار a را برابر طول می‌گیریم و h را برابر طول افقی در نظر می‌گیریم و غیر از آن جای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را نیز عوض می‌کنیم ⇐ ۱۰

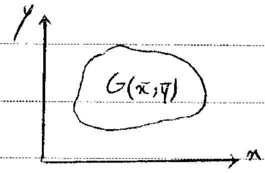
$\bar{x} = \frac{3}{10} \times 8 = 2.4 \quad \bar{y} = \frac{3}{4} \times 4 = 3$

به این نکته نیز توجه شود که روابط بالا به شرط آن است که رأس سهمی بر روی مبدأ مختصات قرار گیرد اگر این امر اتفاق نیفتاد باید به مقادیر بالا مختصات رأس سهمی نیز اضافه شود در اینجا مرکز سهمی بر روی مبدأ قرار گرفته و نیازی به این مسئله نیست

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32 \times 4) - (16 \times 5.33) - (10.66 \times 2.4)}{32 - 16 - 10.66} = 3.2\,in$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{(32 \times 2) - (16 \times 1.33) - (10.66 \times 3)}{32 - 16 - 10.66} = 2.01\,in$$

تمرین: مثال قبل را با استفاده از روش انتگرال‌گیری حل کنید.



حجم ناشی از دوران سطح:

اگر یک شکل دلخواه حول محوری خاص دوران داده شود از دوران سطح یک حجم حاصل می‌شود، اگر این شکل بصورت یک منحنی باشد از دوران آن یک حجم توخالی بدست می‌آید، حجم حاصل از دوران سطح حول هر یک از دو محور x و y به شرح زیر محاسبه می‌شود

دوران حول محور x : $V = A \times (2\pi\bar{y})$

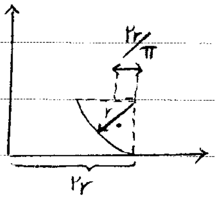
y " " " : $V = A \times (2\pi\bar{x})$

در مورد خطوط و منحنی‌ها سطح جانبی شکل بدست آمده به شرح زیر محاسبه می‌شود:

دوران حول محور x : $A = L \times (2\pi\bar{y})$

y " " " : $A = L \times (2\pi\bar{x})$

مثال: ربع دایره نشان داده شده در شکل زیر را حول محور y دوران داده‌ایم مطلوبست محاسبه سطح جانبی شکل بدست آمده؟ (۵-۶ ص ۱۵۰)



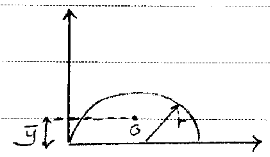
(جدول) $L = \pi r/2$ $\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r(1-1/\pi)$

$A = 2\pi\bar{x} \times L = 2\pi(2r(1-1/\pi)) \times \frac{\pi r}{2} \rightarrow$

$= 2\pi^2 r^2(1-1/\pi) = 2\pi r^2(\pi-1)$

مثال: می‌دانیم که حجم و سطح کره به ترتیب برابرند با $\frac{4}{3}\pi r^3$ و $4\pi r^2$ با استفاده از آن مطلوبست محاسبه مرکز سطح نیم دایره و همچنین مرکز گرانی نیم دایره توخالی؟ (۵-۸ ص ۱۵۰)

در صورت دوران نیم دایره توپر حول محور x یک کره بدست می‌آید



Tamasha

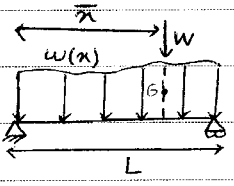
توپر $V = A \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^2}{2} \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

از دوران نیم دایره توخالی، کره توخالی بدست می آید

$A = S \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow 4\pi r^2 = \pi r \times 2\pi\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$

## بارهای گسترده:

اگر یک بار به جای آنکه بصورت متمرکز به یک نقطه وارد شود به یک سطح یا خط پخش شود گسترده است



بار گسترده را می توان با یک بار متمرکز جایگزین کرد

مقدار بار متمرکز برابر انتگرال بار گسترده روی سطح یا خط است

$$\underset{\text{بار متمرکز}}{W} = \int_0^L w(x)\,dx$$

یا به بیان دیگر بزرگی بار برابر مساحت شکلی است که بار گسترده ایجاد می کند

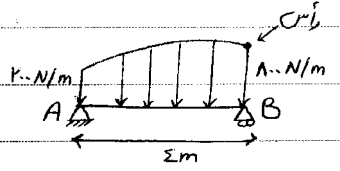
$$\bar{x} = \frac{\int x w(x)\,dx}{\int w(x)\,dx}$$

محل اثر بار متمرکز معادل مرکز ثقل شکل بار است

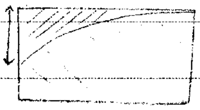
همانند سطوح مرکب در مورد بارهای گسترده مرکب نیز می توان آن ها را به اجزایی به شکل های ساده تر تقسیم نمود و با فرمول هایی مشابه سطوح مرکب مقدار بار متمرکز معادل و محل اثر آن را پیدا کرد

بارهای گسترده شکل های متنوعی می توانند داشته باشند که از جمله می توان به بار گسترده یکنواخت، مثلثی، ذوزنقه ای و سهمی شکل اشاره کرد

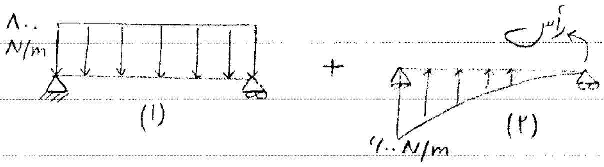
مثال: در تیر شکل زیر بار گسترده را با یک بار متمرکز جایگزین کرده و واکنش های تکیه گاهی را محاسبه نمایید؟

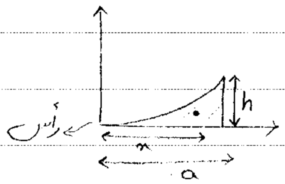


بار گسترده به صورت مرکب است آن را تبدیل به یک بار گسترده یکنواخت که از آن یک بار سهمی شکل کم شده است می نماییم

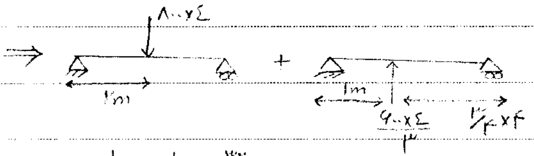


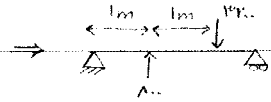
به جای آنکه بار سهمی را کم کنیم، جهت بار را عوض کرده و رو به بالا در نظر می‌گیریم


۸۰۰ N/m
(۱)
+
رأس
۶۰۰ N/m
(۲)

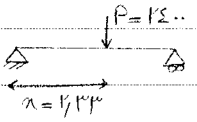


$A = ah/۳$ و $\bar{x} = ۳a/۴$


⇒
۸۰۰×۴
۲m
+
1m
$\frac{۶۰۰×۴}{۳}$
۳/۴×۴


⇒
1m
1m
۳۲۰۰
۸۰۰

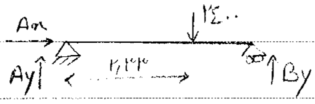
با همین وضعیت نیز می‌توان واکنش‌های تکیه‌گاهی را بدست آورد اما صورت سوال یک بار تک به عنوان برآیند خواسته شده است



$$P = \Sigma P_i = ۳۲۰۰ - ۸۰۰ = ۲۴۰۰$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} = \frac{-۸۰۰ \times ۱ + ۳۲۰۰ \times ۲}{-۸۰۰ + ۳۲۰۰} = ۲٫۳۳$$

حال دیاگرام آزاد تیر را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم


Ax
Ay
۲۴۰۰
۲٫۳۳
By

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

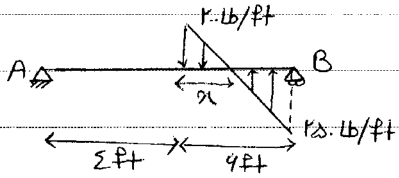
$\circlearrowleft \Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y \times ۴ - ۲۴۰۰ \times ۲٫۳۳ = 0$

$B_y = ۱۴۰۰$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y - ۲۴۰۰ + ۱۴۰۰ = 0 \quad A_y = ۱۰۰۰ N$

مثال: در تیر شکل زیر مطلوبست محاسبه بار متمرکز معادل و مقادیر واکنش‌های تکیه‌گاهی؟

(۵-۸۱ ص۱۵۹)

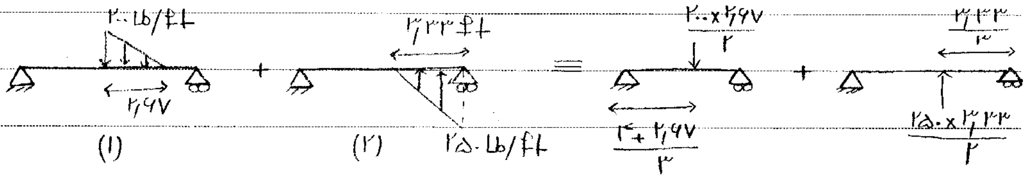

۲۰۰ lb/ft
A
B
x
۲۵۰ lb/ft
۴ft
۶ft

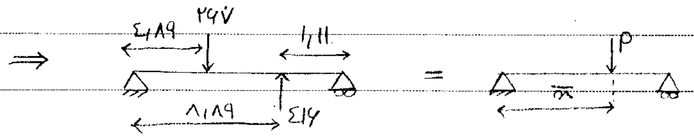
Tamasha

شکل را به دو مثلث تقسیم می‌کنیم، عرض این دو مثلث نامشخص است که می‌توان آن را با استفاده از تشابه دو مثلث بدست آورد

تشابه : $\frac{x}{۶-x} = \frac{۲۰۰}{۲۵۰} = ۰/۸ \Rightarrow ۰/۸(۶-x) = x$

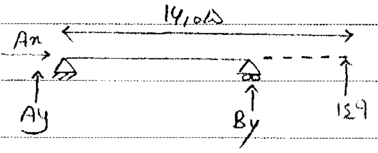
$x = ۲٫۶۷\ ft$


۲۰۰ Lb/ft
۲٫۶۷
(۱)
+
۳٫۳۳ ft
(۲)
۲۵۰ Lb/ft
=
$\frac{۲۰۰\times۲٫۶۷}{۲}$
$\frac{۳+۲٫۶۷}{۳}$
+
$\frac{۳٫۳۳}{۳}$
$\frac{۲۵۰\times۳٫۳۳}{۲}$


⇒
۴٫۸۹
۲۶۷
۱٫۱۱
۸٫۸۹
۴۱۶
=
P
$\bar{x}$

$P = ۲۶۷ - ۴۱۶ = -۱۴۹\ Lb \Rightarrow P = ۱۴۹\ Lb \uparrow$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i} = \frac{۲۶۷\times۴٫۸۹ - ۴۱۶\times۸٫۸۹}{۲۶۷-۴۱۶} = ۱۶٫۰۵$$


۱۶٫۰۵
Ax
Ay
By
۱۴۹

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow ۱۴۹\times۱۶٫۰۵ + B_y\times۱۰ = ۰$

$B_y = -۲۳۹٫۱۴\ Lb = ۲۳۹٫۱۴ \downarrow$

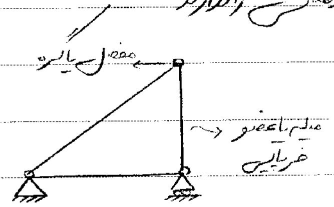
$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow A_y - ۲۳۹٫۱۴ + ۱۴۹ = ۰$

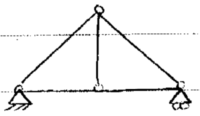
$A_y = ۹۰٫۱۴\ Lb \uparrow$

Tamasha

## خرپاها :

خرپا مجموعه‌ای از میله‌هاست که بوسیله مفصل‌هایی بهم متصل شده‌اند و ترکیبات مثلثی شکل تشکیل داده‌اند. از خرپاها معمولاً برای پوشاندن دهانه‌های بزرگ مانند سوله‌ها و سالن‌های صنعتی استفاده می‌شود. در خرپاها هرکدام از میله‌ها تنها نیروهای محوری را تحمل کرده و توان تحمل نیروهای برشی و خمشی را ندارند.





n : تعداد اعضا

J : تعداد گره‌ها

r : تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی

شرط لازم برای پایداری خرپا : $n+r \geq 2J$

خرپای معین : $n+r = 2J$

خرپای نامعین : $n+r > 2J$

درجه نامعینی : $(n+r)-2J$

خرپای ناپایدار : $n+r < 2J$

## روش‌های حل مسائل خرپا :

۱) روش گره یا مفصل : در این روش مراحل کار به شرح زیر است :

۱- با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل جسم صلب واکنش‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم

۲- در هر یک از گره‌های خرپایی به ترتیب دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و با نوشتن معادلات تعادل گره نیروهای اعضای متصل به گره را محاسبه می‌کنیم در این زمینه لازم است به نکات زیر توجه شود :

- هر عضو خرپایی معادل یک نیروی مجهول با راستای معلوم به موازات عضو می‌باشد

با توجه به آنکه برای هر گره در حالت دو بعدی تنها دو معادله تعادل وجود دارد و با این دو معادله تنها دو مجهول را می‌توان محاسبه کرد در ابتدا باید به سراغ گره‌هایی برویم

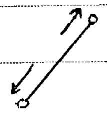
Tamasha

که فقط دو عضو به آن ها متصل باشد (در حالت سه بعدی، سه معادله وجود دارد و باید به سراغ گره های با حداکثر سه عضو برویم)

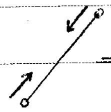
با محاسبه نیروی اعضا از تعداد مجهولات در گره های مجاور نیز کاسته می شود و می توان به سراغ گره های با بیش از دو عضو نیز رفت

- باید توجه کرد که نیرو در هر عضو مقداری ثابت است. هر عضو خرپایی به دو گره ابتدا و انتهای خود دو نیروی موازی، مساوی اما مختلف الجهت وارد می کند پس اگر بطور مثال نیروی وارد به گره ابتدای عضو بدست آمد در رسم دیاگرام آزاد گره انتها باید همان نیرو را با جهتی مخالف قرار دهیم

جهت نیروی عضو خرپایی را معمولاً با توجه به فشاری یا کششی بودن نیروی عضو نمایش می دهند اگر نیرویی که عضو به گره وارد می کند به سمت خارج عضو باشد عضو در فشار است و اگر این نیرو به سمت خود عضو باشد عضو در کشش است



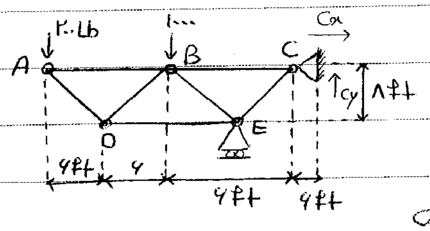
→ P، C (−) فشاری



⇒ T، (+) کششی

توجه: نیروی عکس العملی که گره به عضو وارد می کند مساوی و خلاف جهت نیرویی است که عضو به گره وارد می کند. معمولاً در حل مسائل خرپا با نیروی اعمال شده از طرف عضو به گره سروکار داریم

مثال: با استفاده از روش مفصل ها نیرو در اعضای خرپای زیر را بدست آورید؟
(۶_۱ ص ۱۸۳)



J = ۵ ، n = ۷ ، r = ۳

۲ × ۵ = ۷ + ۳ ⇒ خرپا پایدار

اگر خرپا نامعین شود از روش های استاتیکی قابل حل نیست

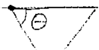
$\sum F_x = ۰ \Rightarrow C_x = ۰$

$\circlearrowleft \sum M_C = ۰ \Rightarrow ۲۰۰۰ \times ۲۴ + ۱۰۰۰ \times ۱۲ - E_y \times ۶ = ۰ \Rightarrow E_y = ۱۰۰۰۰\ Lb$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۲۰۰۰ - ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ + C_y = ۰ \Rightarrow C_y = -۷۰۰۰\ Lb$

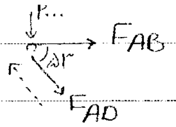
حال باید به سراغ گره‌ها رفته و دیاگرام آزاد آن‌ها را رسم کنیم، برای شروع باید به سراغ گره‌های ۲ عضوی رفت، در اینجا دو گره A و C دو عضوی هستند

گره A :



$\Rightarrow \theta = Arctan(\frac{۸}{۶}) = ۵۳°$

چون نیروی اعضا نامشخص است بطور قراردادی آن‌ها را با جهت کششی رسم می‌کنیم در انتها اگر برای عضو مقدار نیرو مثبت بدست آمد فرض اولیه صحیح است وگرنه جهت نیرو فشاری است



$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۲۰۰۰ - F_{AD} \sin ۵۳ = ۰$

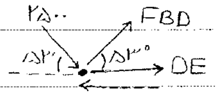
$\Rightarrow F_{AD} = -۲۵۰۰\ Lb$

$\Rightarrow F_{AD} = ۲۵۰۰\ Lb$ (P) یا (C)

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{AB} - ۲۵۰۰ \cos ۵۳ = ۰ \Rightarrow F_{AB} = ۱۵۰۰\ Lb\ (T)$

با محاسبه نیروی عضو AD در گره D دو مجهول وجود خواهد داشت و این گره نیز قابل حل است

در مورد نیروی عضو AD، چون جهت نیرو در گره A به سمت بالا و چپ است در گره D این نیرو برعکس به سمت پایین و راست خواهد بود



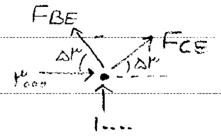
$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۲۵۰۰ \sin ۵۳ + F_{BD} \sin ۵۳ = ۰$

$\Rightarrow F_{BD} = ۲۵۰۰\ Lb\ (T)$

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow ۲۵۰۰ \times \cos ۵۳ + F_{DE} + ۲۵۰۰ \cos ۵۳ = ۰$

$\Rightarrow F_{DE} = -۳۰۰۰\ Lb\ (C)$

گره E :



$\sum F_x = ۰ \Rightarrow ۳۰۰۰ - F_{BE} \cos ۵۳ + F_{CE} \cos ۵۳ = ۰$

$\Rightarrow ۰/۶ F_{BE} + ۰/۶ F_{CE} = -۳۰۰۰$

$F_{CE} - F_{BE} = ۵۰۰۰$ ①

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۱۰۰۰۰ + F_{BE} \sin ۵۳ + F_{CE} \sin ۵۳ = ۰$

$۱۰۰۰۰ + ۰/۸ F_{BE} + ۰/۸ F_{CE} = ۰$ ②

Tamasha

$۱۰۰۰۰ + ۰/۸ F_{BE} + ۰/۸(F_{BE} - ۵۰۰۰) = ۰ \Rightarrow ۱۰۰۰۰ + ۱/۶ F_{BE} - ۴۰۰۰ = ۰$

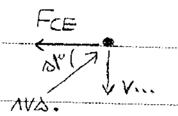
$\Rightarrow ۱/۶ F_{BE} = -۶۰۰۰ \Rightarrow F_{BE} = -۳۷۵۰$

$\Rightarrow F_{BE} = ۳۷۵۰ \, Lb \, (C)$

مقدار بدست آمده را در معادله (۱) قرار می‌دهیم

$F_{CE} = -۳۷۵۰ - ۵۰۰۰ = -۸۷۵۰ \Rightarrow F_{CE} = ۸۷۵۰ \, Lb \, (C)$

گره C:



$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -F_{BC} + ۸۷۵۰ \cos ۵۳ = ۰$

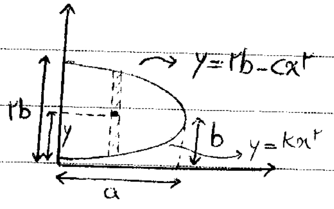
$\Rightarrow F_{BC} = ۵۲۵۰ \; (T)$

معادله تعادل در راستای محور y را نیز فقط جهت کنترل جواب می‌نویسیم

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -۷۰۰۰ + ۸۷۵۰ \sin ۵۳ = -۷۰۰۰ + ۸۷۵۰ \times ۰/۶$

$-۷۰۰۰ + ۷۰۰۰ = ۰$ ✓

مثال: مرکز سطح شکل نشان داده شده را با انتگرال‌گیری مستقیم بدست آورید؟
(۵-۴۷ ص ۲۵۲)



محاسبه K:

$x = a \Rightarrow y = b$

$b = ka^۲ \Rightarrow k = b/a^۲$

محاسبه C:

$x = a \Rightarrow y = b$

$b = ۲b - ca^۲ \Rightarrow -b = -ca^۲ \Rightarrow c = b/a^۲$

عرض المان: $dx$ ارتفاع المان: $(۲b - cx^۲) - (kx^۲) = (۲b - \frac{b}{a^۲}x^۲) - (\frac{b}{a^۲}x^۲)$

$= ۲b - \frac{۲b}{a^۲}x^۲$

$dA = dx(۲b - \frac{۲b}{a^۲}x^۲)$

$$A = \int dA = \int_۰^a (۲b - \frac{۲b}{a^۲}x^۲)\,dx = ۲b\left[x - \frac{x^۳}{۳a^۲}\right]_۰^a = ۲b\left[a - \frac{a^۳}{۳a^۲}\right] = \frac{۴ab}{۳}$$

$$Q_y = \int x\,dA = \int x(۲b - \frac{۲b}{a^۲}x^۲)\,dx = ۲b\left[\frac{x^۲}{۲} - \frac{x^۴}{۴a^۲}\right]_۰^a = ۲b\left[\frac{a^۲}{۲} - \frac{a^۴}{۴a^۲}\right] = \frac{ba^۲}{۲}$$

$$Q_x = \int y\,dA = \int y(۲b - \frac{۲b}{a^۲}x^۲)\,dx$$

در محاسبه $Q_x$ در انتگرال بجای y باید مختصات y مرکز المان قرار داده شود

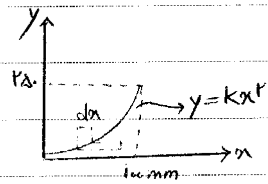
$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[\frac{b}{a^2}x^2+\left(2b-\frac{b}{a^2}x^2\right)\right]=b$$

$$\Rightarrow Q_x=\int_0^a b\left(2b-\frac{2b}{a^2}\right)x^2dx=2b^2\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a=2b^2\left[a-\frac{a^3}{3a^2}\right]=\frac{4ab^2}{3}$$

$$\bar{x}=\frac{Q_y}{A}=\frac{ba^2/2}{4ab/3}=\frac{3}{8}a \qquad \bar{y}=\frac{Q_x}{A}=\frac{4ab^2/3}{4ab/3}=b$$

مثال: منحنی سهمی شکل نشان داده شده در شکل زیر را به اندازه ۱۸۰° حول محور y دوران می‌دهیم مساحت جانبی شکل فضایی بدست آمده چقدر است؟

محاسبه K:



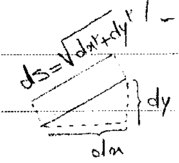
$$x=100 \Rightarrow y=250 \Rightarrow 250=K\times100^2$$

$$K=0/0125$$

$$\Rightarrow y=0/0125x^2$$

$$A=\left[2\pi\bar{x}\times S\right]\times\frac{\pi}{2\pi}=\pi\bar{x}.S$$

چون دوران کامل نیست باید سطح جانبی را با توجه به تناسب بدست آوریم



$$ds=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=dx\sqrt{1+y'^2} \qquad y'=0/05x$$

فاکتور

$$S=\int_0^{100}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{100}\sqrt{1+0/0025x^2}\,dx=212/01$$

$$\int\sqrt{a^2+u^2}\,dx$$

$$u=a\tan t \Rightarrow 0/05x=\tan t \Rightarrow x=20\tan t$$

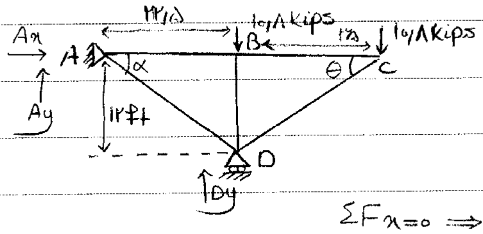
$$du=a\sec^2t\,dt \Rightarrow du=a(0/05x)=0/05dx=\sec^2t\,dt$$

$$\Rightarrow dx=20\sec^2t\,dt$$

$$S=\int\sqrt{1+20\tan^2}\times20\sec^2t\,dt=\left[\frac{(1+20\tan^2)^{3/2}}{3/2}\right]$$

(حل غلط است)

مثال : با استفاده از روش مفاصل نیرو در اعضای خرپای زیر را حساب کنید.



$n = ۵ \quad J = ۴ \quad r = ۳$

$۵ + ۳ = ۲ \times ۴ = ۸ \Rightarrow$ معین است

معادلات تعادل را می نویسیم

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow -۱۰٫۸ \times ۵۷٫۵ - ۱۰٫۸ \times ۲۲٫۵ + D_y \times ۲۲٫۵ = ۰$

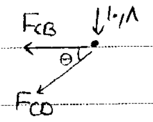
$\Rightarrow D_y = ۳۸٫۴$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y + ۳۸٫۴ - ۱۰٫۸ - ۱۰٫۸ = ۰ \Rightarrow A_y = -۱۶٫۸$

$A_y = ۱۶٫۸ \downarrow$

از یکی از گره‌های دو عضوی شروع می کنیم، A و C دو عضوی اند

گره C :



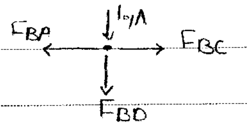
$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۳۵}\right) = ۱۸٫۹$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۱۲}{۲۲٫۵}\right) = ۲۸٫۱$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۱۰٫۸ - F_{CD} \sin ۱۸٫۹ \Rightarrow F_{CD} = -۳۳٫۳ \Rightarrow F_{CD} = ۳۳٫۳ \text{ kips } (C)$ فشاری

$\sum F_x = ۰ \Rightarrow -F_{CB} + ۳۳٫۳ \cos ۱۸٫۹ = ۰ \Rightarrow F_{CB} = ۳۱٫۵ \; (T)$ کششی

گره B :



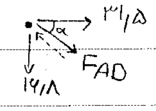
$\Rightarrow \quad \sum F_x = ۰ \Rightarrow -F_{BA} + ۳۱٫۵ = ۰$

$F_{BA} = ۳۱٫۵ \; (T)$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۱۰٫۸ - F_{BD} = ۰ \Rightarrow F_{BD} = -۱۰٫۸$

$\Rightarrow F_{BD} = ۱۰٫۸ \; (C)$

گره A :



$\sum F_x = ۰ \Rightarrow ۳۱٫۵ + F_{AD} \cos ۲۸٫۱ = ۰$

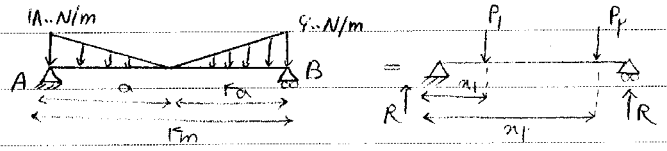
$F_{AD} = -۳۵٫۷ \text{ kips}$

$F_{AD} = ۳۵٫۷ \; (C)$ فشاری

معادله $\sum F_y = ۰$ را برای کنترل درستی جواب می نویسیم

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow -۱۶٫۸ + ۳۵٫۷ \sin ۲۸٫۱ \simeq ۰٫۷$

مثال: در تیر شکل زیر فاصله a را به گونه‌ای تعیین کنید که واکنش روی تکیه‌گاه‌ها با هم مساوی شوند؟ (۵-۸۵ ص ۱۸۱)



$$P_1=\frac{۱۸۰۰a}{۲}=۹۰۰a\ ,\quad x_1=a/۳$$

$$P_2=\frac{۶۰۰(۴-a)}{۲}=۳۰۰(۴-a)\ ,\quad x_2=۴-\frac{(۴-a)}{۳}=\frac{۸-a}{۳}$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow ۲R-۹۰۰a-۳۰۰(۴-a)=0 \Rightarrow ۲R-۹۰۰a-۱۲۰۰+۳۰۰a=0$$

$$R=۳۰۰a+۶۰۰ \quad (۱)$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow ۴R-P_2\times x_2-P_1\times x_1=0 \Rightarrow ۴(۳۰۰a+۶۰۰)-۳۰۰(۴-a)\left(\frac{۸-a}{۳}\right)-۹۰۰\times a/۳=0$$

$$\Rightarrow ۱۲۰۰a+۲۴۰۰-۳۲۰۰+۱۲۰۰a-۱۰۰a^۲-۳۰۰a^۲=0$$

$$-۴۰۰a^۲+۲۴۰۰a-۸۰۰=0 \Rightarrow a^۲-۶a+۲=0$$

$$\Delta=۶^۲-۴(۲)(۱)=۲۸$$

$$a=\frac{۶\pm\sqrt{۲۸}}{۲}=\begin{cases} a=۵/۶ \geqslant ۴ \ \times \\ a=۰/۳۵ \ \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow R=۳۰۰\times ۰/۳۵+۶۰۰=۷۰۵\ N$$

روش مقطع:

این روش بیشتر در حالتی استفاده می‌شود که فقط نیروی یک یا چند عضو خاص از خرپا مورد نظر باشد. نحوه حل مسئله در این روش به شرح زیر است:

۱) با رسم دیاگرام آزاد خرپا و نوشتن معادلات تعادل، واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه می‌کنیم.

۲) در خرپا یک مقطع ایجاد می‌کنیم، مقطع ایجاد شده باید دارای شرایط زیر باشد:

الف) خرپا را حداقل به دو تکه مجزا تقسیم کند

ب) عضو یا اعضای مورد نظر را قطع کند، اگر تعداد اعضای مورد نظر دو یا بیشتر باشد

Tamasha

ممکن است به بیش از یک مقطع نیاز باشد

ح) تعداد اعضای قطع شده حداکثر سه عضو باشند. اگر در مقطعی جز عضو مورد نظر بقیه عضوهای قطع شده موازی یا همرس باشند می‌شود تعداد اعضای قطع شده بیش از ۳ عضو باشد

د) اعضای قطع شده همزمان موازی یا متقارب نباشند

۳) از تکه‌های ایجاد شده در هر بار یک تکه را جدا کرده و دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم. دیاگرام آزاد این تکه شامل تمامی نیروهای معلوم و مجهول وارد بر آن است. در دیاگرام آزاد اعضای قطع شده رسم نمی‌شوند ولی نیروهای آنها بصورت مجهول ترسیم می‌گردد

۴) در تکه انتخاب شده معادلات تعادل را طوری می‌نویسیم تا نیروی عضو یا اعضای مورد نظر محاسبه شوند

اگر فقط نیروی یک عضو مورد نظر باشد بهتر است برای راحتی کار، فقط معادله‌ای را بنویسیم که منجر به نیروی آن عضو شود

این معادله بیشتر از روابط تعادلی است. ابتدا دو معادله تعادل $\Sigma F_x = 0$ ; $\Sigma F_y = 0$ را کنترل می‌کنیم که آیا به نیروی عضو مورد نظر ختم می‌شود یا خیر (ممکن است برای رسیدن به نتیجه مجبور شویم محورهای مختصات را بصورت مورب در نظر بگیریم) اگر دو معادله فوق منجر به نتیجه نشد سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم. در این حالت عضو مورد نظر را کنار گذاشت و دیگر نیروهای مجهول را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در یک نقطه (تلاقی) قطع کنند

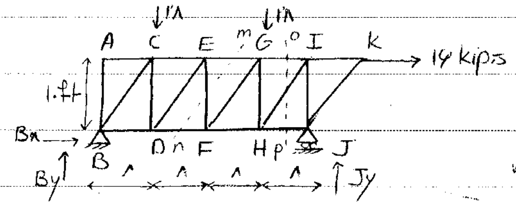
سپس معادله تعادل لنگر را حول نقطه مورد نظر می‌نویسیم تا نیروی عضو مورد نظر بدست آید

بعضاً ممکن است نقطه تقاطعی وجود نداشته باشد که تمام شرایط مورد نظر را داشته باشد در این حالت در مجاورت عضو مورد نظر مقطعی کمکی می‌زنیم و نیروی اعضای مجاور را بدست می‌آوریم سپس با کم شدن تعداد مجهولات به مقطع اصلی باز می‌گردیم و نیروی عضو مورد نظر را می‌یابیم

در بعضی موارد پس از برش قطعه‌ای از خرپا به وجود می‌آید که در آن واکنش‌های تکیه‌گاه حضور ندارند در این حالت می‌توان بدون محاسبه واکنش تکیه‌گاه‌ها شروع به مقطع زدن

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای EF و GI در خرپای شکل را بدست آورید؟

نمودار آزاد خرپا را رسم می‌کنیم



$\sum F_x = ۰ \Rightarrow B_x = ۱۶$

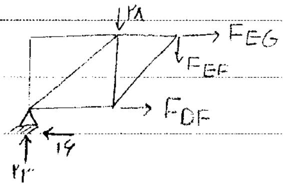
$\circlearrowleft \sum M_B = ۰ \Rightarrow -۱۶\times۱۰ + J_y\times۳۲ - ۲۸\times۲۴$
$-۲۸\times۸ = ۰$

$\Rightarrow J_y = ۳۳$ kips

$\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow B_y - ۲۸ - ۱۸ + ۳۳ = ۰ \Rightarrow B_y = ۲۳$

مقطعی وجود ندارد که شامل هر دو عضو مورد نظر بوده و تمام شرایط را نیز داشته باشد پس برای هر کدام از دو عضو یک مقطع به صورت جداگانه می‌زنیم

عضو EF: مقطع mn را می‌زنیم و یک سمت چپ را انتخاب کرده و دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم

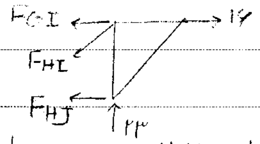


معادله $\sum F_y = ۰$ مستقیماً نیروی عضو EF را نتیجه می‌دهد

$\uparrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲۳ - ۲۸ - F_{EF} = ۰$

$\Rightarrow F_{EF} = -۵ \Rightarrow F_{EF} = ۵$ kips فشاری

عضو GI: برای عضو GI از مقطع OP مطابق شکل کمک می‌گیریم پس دیاگرام آزاد سمت راست را رسم می‌کنیم



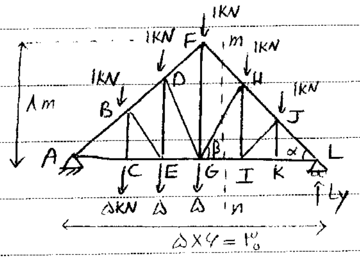
در اینجا دو معادله $\sum F_x = ۰$ و $\sum F_y = ۰$ منجر به نیروی عضو GI نمی‌شود پس به سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم

عضو GI را اگر کنار بگذاریم و نیروی دو عضو مجهول دیگر یعنی HI و HJ را امتداد می‌دهیم این دو خط یکدیگر را در نقطه H قطع می‌کنند پس معادله تعادل لنگر را حول این نقطه می‌نویسیم

$\circlearrowleft \sum M_H = ۰ \Rightarrow -۱۶\times۱۰ + ۳۳\times۸ + F_{GI}\times۱۰ = ۰ \Rightarrow F_{GI} = -۱۰/۴$

$\Rightarrow F_{GI} = ۱۰/۴$ فشاری

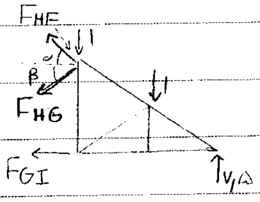
مثال: مطلوبست تعیین نیروی عضوهای FH، GI و GH در خرپای زیر.



برای هر سه عضو کافیست که از مقطع عرضی mn نشان داده شده در شکل استفاده کنیم و بهتر است تکه سمت راست که شکل و بارگذاری ساده‌تری دارد را انتخاب کنیم. تکه سمت راست واکنش تکیه‌گاه L وجود دارد که ابتدا باید این واکنش محاسبه شود

$$\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow L_y \times ۳۰ - ۱\times۲۵ - ۱\times۲۰ - ۱\times۱۵ - ۱\times۱۰ - ۱\times۵ - ۵\times۱۵ - ۵\times۱۰ - ۵\times۵ = ۰$$

$$\Rightarrow L_y = ۷٫۵\,KN$$



حال دیاگرام تکه سمت راست مقطع mn از خرپا را رسم می‌کنیم ابتدا با توجه به هندسه سازه زوایه α و β و طول قطعه HI را بدست می‌آوریم

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۸}{۱۵}\right) = ۲۸٫۰۷^\circ$$

$$\text{تشابه}: \quad \frac{HI}{۸} = \frac{۱۰}{۱۵} \Rightarrow HI = ۵٫۳۳m$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{۵٫۳۳}{۵}\right) = ۴۶٫۸۵^\circ$$

حال به سراغ معادلات تعادل می‌رویم به جای دو معادله $\Sigma F_x = ۰$ و $\Sigma F_y = ۰$ به ترتیب [illegible] به سراغ معادله تعادل لنگر می‌رویم برای عضو GI معادله تعادل لنگر حول نقطه H نوشته می‌شود

$$\circlearrowleft \Sigma M_H = ۰ \Rightarrow -F_{GI} \times ۵٫۳۳ - ۱\times۵ + ۷٫۵\times۱۰ = ۰ \longrightarrow F_{GI} = ۱۳٫۱۳$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_G = ۰ \Rightarrow ۷٫۵\times۱۵ - ۱\times۱۰ - ۱\times۵ + F_{HF} \times GH \sin(\alpha+\beta)$$

$$GH = \sqrt{۵^۲ + ۵٫۳۳^۲} = ۷٫۳۱$$

$$\alpha + \beta = ۲۸٫۰۷ + ۴۶٫۸۵ = ۷۴٫۹۲^\circ$$

مقادیر فوق را در معادله بالا جایگزین می‌کنیم

$F_{FH} = -۱۳٫۸۱ \Rightarrow F_{FH} = ۱۳٫۸۱$ فشاری

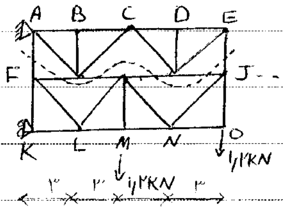
$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -F_{HG} \sin ۴۶٫۸۵ - ۱۳٫۸۱ \sin ۲۸٫۰۷ - ۱ - ۱ + ۷٫۵ = ۰$$

$$\Rightarrow F_{HG} = -۱٫۳۷۱\,KN \Rightarrow F_{HG} = ۱٫۳۷۱\ (C)$$

Tamasha

تمرین: مطلوبست تعیین نیروی اعضای AF و EJ در خرپای شکل زیر؟

راهنمایی: از مقطع ترسیم شده در شکل کمک بگیرید؟



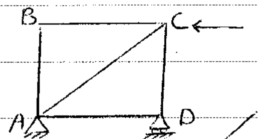
مقطع نشان داده شده در شکل
از ۳ عضو را قطع می کند اما با توجه به اینکه
غیر از عضو مورد نظر بقیه اعضا قطع شده در یک
نقطه متقاطع اند مقطع قابل قبول است!

نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه تقارب نیروی عضو مورد نظر را بدست می آید

EJ: $\sum M_F=0$ , AF: $\sum M_J=0$

موارد خاص در خرپا:

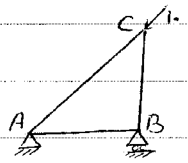
۱) گره های دو عضوی: در گره های دو عضوی می توان مستقیماً دیاگرام آزاد گره را رسم کرده و نیروی هر دو عضو را بدست آورد. اگر گره متصل به تکیه گاه باشد ابتدا باید واکنش آن تکیه گاه را محاسبه کرد و سپس دیاگرام آزاد گره را رسم کرد. اگر گره فاقد نیرو باشد هر دو عضو صفر نیرویی خواهند شد



گره B دو عضوی و فاقد نیرو

$F_{AB}=F_{BC}=0$

اگر در گره دو عضوی یک نیرو داشته باشیم و آن نیرو موازی یکی از دو عضو باشد نیرو مستقیماً به آن عضو منتقل می شود و عضو غیر موازی صفر نیرویی می شود



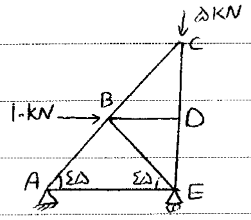
$F_{AC}=10KN$

$F_{BC}=0$

۲) گره سه عضوی وقتی که دو عضو موازی هم باشند.

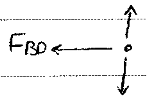
در این حالت می توان دیاگرام آزاد گره را ترسیم نموده و معادله تعادل در راستای محوری عمود بر دو عضو موازی را نوشت و نیروی عضو سوم را محاسبه کرد. اگر در راستای این محور مؤلفه نیرویی نباشد عضو سوم صفر نیرویی است

Tamasha


۵KN
C
B
۱۰KN
D
A
۴۵
۴۵
E

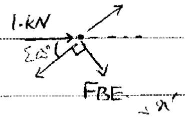
با صفر شدن عضو BD
این عضو قابل حذف
است آنگاه گره D نیز دارای
همین شرایط است

گره D : سه عضوی } CD و DE موازی



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BD} = 0$

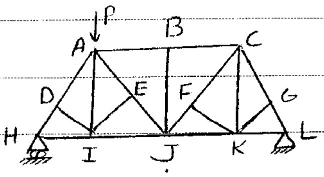
گره B :


۱۰KN
۴۵
FBE
x'

$\Sigma F_{x'} = 0 \Rightarrow 10 \sin 45 + F_{BE} = 0$

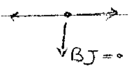
$F_{BE} = -7.07 \Rightarrow F_{BE} = 7.07$ فشاری

مثال : در خرپای شکل اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟

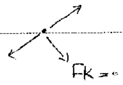

P
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L

هرگاه فاقد گره دو عضوی فاقد نیرو می‌باشند دو گره H
و L دو عضوی اند اما به دلیل واکنش های
تکیه گاهی نیرو دارند نیروهای تکیه گاهی برای اینکه
یکی از دو عضو [illegible] عضو [illegible] را صفر نیرویی
را است

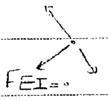
گره های ۳ عضوی با دو عضو موازی : گره B :



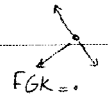
گره F :



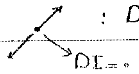
گره E :



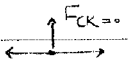
گره G :



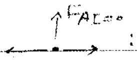
گره D :



گره K :



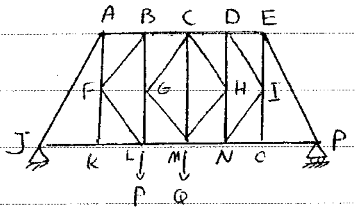
گره I :



مثال : در خرپای شکل اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟

Tamasha

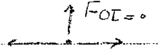
نوت برداری شده از کلاس درس استاتیک کارشناسی مهندس احمدرضا جعفری، دانشکده غیرانتفاعی عمران و توسعه همدان



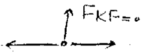
خرپا گره دو عضوی دارای شرایط عضو صفر نیرویی نمی باشد

گره سه عضوی با دو عضو هم راستا :

گره O :



گره K :



گره های دیگر فاقد شرایط عضو صفر نیرویی اند

قابها (سازه های دارای اعضای چند نیرویی) :

قاب مجموعه ای از اعضایی است که با اتصالات مفصلی به یکدیگر متصل شده اند آنچه قاب را از خرپا متمایز می کند وجود یک یا چند مورد از موارد زیر است

۱) اعضایی توانند غیر از مفصل ها در دو انتها در قسمت های میانی خود نیز شامل بار باشند

۲) لزومی به مستقیم بودن عضو نیست و عضو می تواند به صورت منحنی یا چند تکه نیز باشد

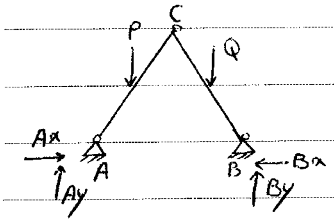
۳) لزومی ندارد که عضو فقط در دو انتهای خود به اعضای مجاور متصل شده باشد و غیر از نقاط فوق می تواند در نقاط میانی خود نیز به اعضای مجاور متصل شود

روش حل مسائل قاب :

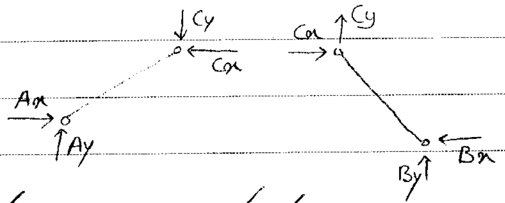
ابتدا با رسم دیاگرام آزاد آن و نوشتن معادلات تعادل واکنش های تکیه گاهی قاب را محاسبه می کنیم سپس قاب را به چند تکه تقسیم می کنیم و برای هر تکه از قاب دیاگرام آزاد آن را رسم می نماییم و معادلات تعادل آن را می نویسیم در رسم دیاگرام آزاد در هر مفصل باید دو واکنش افقی و عمودی مجهول قرار داده شود. برای قطعات مجاور در محل مفصل مقادیر واکنش ها همان مقادیر ولی با جهات متفاوت هستند (برآیند نیروهای مختلف وارد بر مفصل از طرف قطعات مختلف باید صفر شود)

اگر بیش از دو قطعه به یک مفصل متصل شده باشد واکنش های وارد بر گره از طرف هر یک از قطعات لزومی ندارد که با هم مساوی باشند اما در هر صورت برآیند آنها باید صفر شود بجای دو واکنش افقی و عمودی مجهول می توان یک واکنش

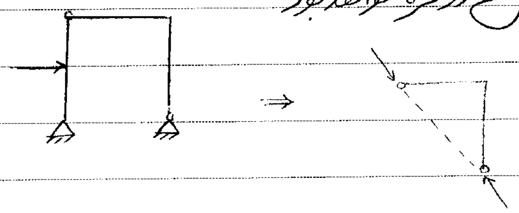
با مقدار و راستای مجهول نیرو جایگزین کرد



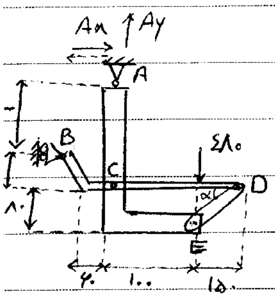
چون نیروهای گره‌ها داخلی می‌شوند مجموعه قاب است نه خرپا، شروعی ندارد که در مرحله اول تمام واکنش‌های تکیه‌گاهی محاسبه شود و ممکن است در حالتی که تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی چهار یا بیشتر باشد برخی از واکنش‌ها به جای استفاده از معادلات تعادل کل قاب از طریق معادلات تعادل قطعات قاب بدست آید



نکته: اگر عضوی از قاب فقط به دو مفصل متصل باشد و نیز فاصله ابتدا تا انتهای خود (غیر از دو مفصل) فاقد نیرو باشد، نیرویی که گره‌ها به قطعه وارد می‌کنند یک تک نیرو در راستای خط واصل دو گره خواهد بود



مثال: در قاب نشان داده شده عضوهای ACE و BCD بوسیله پین C و میله DE به هم متصل شده‌اند با توجه به بارگذاری مفروض نیروی در میله DE و مؤلفه‌های نیروی وارد بر عضو BCD در نقطه C را تعیین کنید.



مجموعه شامل سه تکه ACE، BCD و DE می‌باشد

قطعه DE حالت یک میله را دارد و نیروی آن در راستای DE می‌باشد. دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می‌کنیم

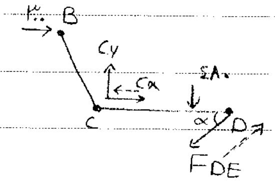
$\Sigma F_y = ٠ \Rightarrow A_y - ٤٨٠ = ٠ \quad A_y = ٤٨٠\,N \uparrow$

Tamasha

$\curvearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow -۴۸۰ \times ۱۰۰ + B_x \times ۱۶۰ = ۰ \Rightarrow B_x = ۳۰۰$

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow ۳۰۰ + A_x = ۰ \quad A_x = -۳۰۰ \Rightarrow A_x = ۳۰۰ \overleftarrow{N}$

BCD عضو :



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۸۰}{۱۵۰}\right) = ۲۸٫۰۷°$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = ۰ \Rightarrow -۳۰۰ \times ۶۰ - C_y \times ۲۵۰ + ۴۸۰ \times ۱۵۰ = ۰$

$\Rightarrow C_y = ۲۱۶ N \uparrow$

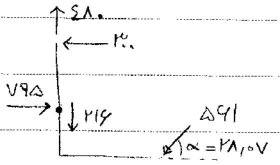
$\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۲۱۶ - ۴۸۰ - F_{DE} \sin ۲۸٫۰۷ = ۰ \Rightarrow F_{DE} = -۵۹۱ N$

$\Rightarrow F_{DE} = ۵۹۱ N \ (C)$ فشاری ↗

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow ۳۰۰ + C_x + ۵۹۱ \cos ۲۸٫۰۷ = ۰$

$\Rightarrow C_x = -۷۹۵ N \Rightarrow C_x = ۷۹۵ N \leftarrow$

ACE قطعه :

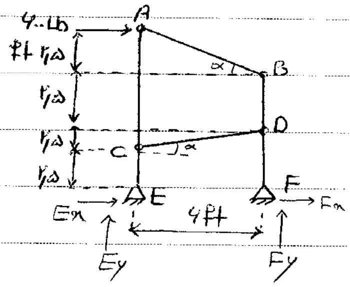


نکته : نیرویی که میله DE به دو مفصل ابتدا و انتهای خود وارد می‌کند مساوی و خلاف جهت است

در اینجا هیچ واکنش مجهولی وجود ندارد فقط جهت کنترل جواب یکی از معادلات تعادل را می‌نویسیم

$\curvearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow ۷۹۵ \times ۲۲۰ - ۵۹۱ \cos ۲۸٫۰۷ \times ۳۰۰ - ۵۹۱ \sin ۲۸٫۰۷ \times ۱۰۰ = ۰$ ✓

مثال : در قاب مطابق شکل نیروی افقی ۶۰۰ پوند بر پین A وارد می‌شود نیروهای وارد بر روی عضو عمودی این قاب را تعیین کنید ؟



مجموعه شامل چهار تکه ACE ، BDF ، AB و CD می‌باشند که قطعه AB و CD میله می‌باشند میله‌ها دارای یک نیرو در راستای خود هستند که جهت این نیرو در دو مفصل ابتدا و انتها مخالف هم می‌باشند، دیاگرام آزاد مجموعه را رسم می‌کنیم

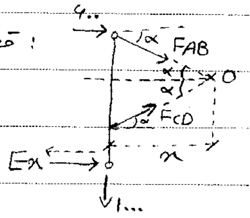
Tamasha

$\curvearrowleft \Sigma M_E = ۰ \Rightarrow -۶۰۰ \times ۱۰ + F_y \times ۶ = ۰ \Rightarrow F_y = ۱۰۰۰\ Lb \uparrow$

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow E_y + ۱۰۰۰ = ۰ \Rightarrow E_y = -۱۰۰۰\ Lb \Rightarrow E_y = ۱۰۰۰ \downarrow$

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow E_x + F_x + ۶۰۰ = ۰ \Rightarrow E_x + F_x = -۶۰۰ \quad (۱)$

قطعه ACE :



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۲/۵}{۶}\right) = ۲۲/۶^\circ$

$\tan\alpha = \frac{۳/۷۵}{x} \Rightarrow x = \frac{۳/۷۵}{\tan\alpha} = \frac{۳/۷۵}{\tan ۲۲/۶} = ۹\ ft$

گشتاور را حول نقطه O می نویسیم تا دو مجهول از ۳ مجهول کم شود

$\curvearrowleft \Sigma M_O = ۰ \Rightarrow ۱۰۰۰ \times ۹ - ۶۰۰ \times ۳/۷۵ + E_x \times ۶/۲۵ = ۰$

$\Rightarrow E_x = -۱۰۸۰\ Lb \Rightarrow E_x = ۱۰۸۰ \leftarrow$

مقدار بدست آمده را در معادله (۱) قرار می دهیم چون برای Ex عدد منفی بدست آمده است در آنجا نیز با علامت منفی جایگزین می شود

$(۱)\ \text{معادله} \Rightarrow -۱۰۸۰ + F_x = -۶۰۰ \Rightarrow F_x = ۴۸۰\ \overrightarrow{Lb}$

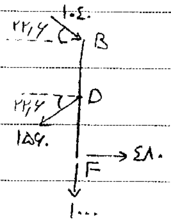
$\curvearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow -۱۰۸۰ \times ۱۰ + F_{CD} \times ۷/۵ \times \cos ۲۲/۶ = ۰$

$\Rightarrow F_{CD} = ۱۵۶۰\ Lb\ (T)$

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -۱۰۸۰ + ۶۰۰ + ۱۵۶۰ \cos ۲۲/۶ + F_{AB} \cos ۲۲/۶ = ۰$

$F_{AB} = -۱۰۴۰\ lb \quad F_{AB} = ۱۰۴۰\ (C)$

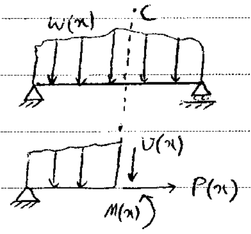
قطعه BDF فقط جهت کنترل جواب ترسیم و یکی از معادلات آن نوشته می شود



$\overrightarrow{\Sigma F_x} = ۰ \Rightarrow ۱۰۴۰ \cos ۲۲/۶ - ۱۵۶۰ \times \cos ۲۲/۶ + ۴۸۰ = ۰ \checkmark$

## دیاگرام های برش و لنگر در تیرها :

در یک تیر با بارگذاری دلخواه اگر در هر نقطه از تیر یک مقطع ایجاد کنیم تا تیر به دو تکه تقسیم شود دیگر از دو تکه را بیرون کشیده و دیاگرام آزاد آن را رسم کنیم برای آنکه این تکه دارای تعادل باشد باید در نقطه برش سه واکنش داخلی وجود داشته باشد این سه واکنش به صورت دو نیروی موازات و عمود بر راستای تیر و یک گشتاور خمشی می باشند



این سه واکنش با نوشتن معادلات تعادل قطعه انتخاب شده از تیر قابل محاسبه است نیروی بدست آمده به موازات تیر نیروی محوری در آن نقطه واکنش عمود بر راستای تیر نیروی برشی آن نقطه و لنگر خمشی بدست آمده لنگر خمشی آن نقطه می باشند اگر برای تمامی نقاط تیر این واکنش های داخلی محاسبه شود و کنار هم قرار دادن مقادیر بدست آمده سه دیاگرام بدست می آید این دیاگرام ها عبارتند از: دیاگرام نیروی محوری نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با توجه به اینکه معمولا در تیرها مقدار نیروی محوری قابل توجه نیست دیاگرام نیروی محوری از اهمیت کمتری برخوردار است و معمولا دو دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی ترسیم می شوند

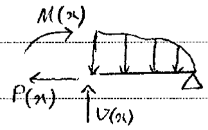
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow P(x) =$ نیروی محوری

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V(x) =$ " برشی

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M(x) =$ لنگر خمشی

قرارداد برای جهت مثبت واکنش های داخلی برحسب آنکه قطعه سمت چپ یا سمت راست تیر انتخاب شود خلاف هم و مطابق شکل است

قطعه سمت راست :

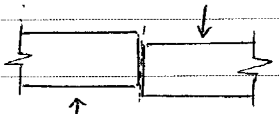


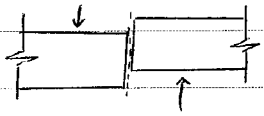
در محل برش خورده بهتر است قطعه ای انتخاب شود که شکل ساده تری دارد اگر دو قطعه از این لحاظ تفاوت قابل ملاحظه ای نداشتند بهتر است قطعه سمت چپ انتخاب شود

برای تعیین جهت مثبت و منفی واکنش های داخلی به شکل زیر می توان عمل کرد:

در مورد نیروهای محوری، نیروهای کششی همیشه مثبت و نیروهای فشاری همیشه منفی است

در مورد نیروی برشی اگر نیروهای وارد بر تیر به گونه ای باشند که تمایل داشته باشند قطعه سمت چپ نقطه مورد نظر را نسبت به قطعه سمت راست به سمت بالا حرکت دهند برش مثبت است و عکس آن برش منفی است


برش مثبت

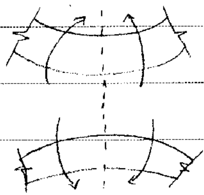

برش منفی

پس بر این اساس اگر قطعه سمت چپ انتخاب شود و یا از چپ به راست جهت ترسیم دیاگرام حرکت می کنیم نیروهای رو به بالا مثبت و رو به پایین منفی است

برعکس آن اگر قطعه سمت راست را انتخاب کردیم و یا از راست به چپ دیاگرام را ترسیم می کنیم نیروهای رو به پایین مثبت و رو به بالا منفی است

در مورد گشتاور اگر گشتاورهای وارد بر تیر تمایل داشته باشند که به تیر در نقطه مورد نظر انحنای رو به بالا بدهند گشتاور مثبت و در غیر اینصورت منفی است

گشتاور مثبت



گشتاور منفی

پس بر این اساس اگر قطعه سمت چپ انتخاب شده باشد و یا حرکت از چپ به راست باشد گشتاورهای ساعتگرد مثبت و پادساعتگرد منفی فرض می شود برعکس آن اگر قطعه سمت راست انتخاب شود و یا حرکت از راست به چپ باشد گشتاور پادساعتگرد مثبت و ساعتگرد منفی است

روش های ترسیم دیاگرام:

۱) روش مقطع: در این روش در نقطه دلخواه با فاصله مجهول از دو انتهای یک مقطع زده می شود و با انتخاب یکی از دو قطعه و استفاده از یکی از روش های گفته شده مقادیر عکس العمل داخلی محاسبه می گردد چون موقعیت این نقطه مجهول است

مقادیر بدست آمده برای واکنش‌ها نیز تابعی از یک متغیر مثل x خواهد بود سپس می‌توان با استفاده از روش‌های ریاضی نمودارهای مربوطه را ترسیم نمود

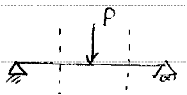
در هر تیر لزوماً به یک مقطع نیاز نیست و گاهی به بیش از یک مقطع نیاز داریم برای انتخاب مقاطع در تیر باید به نکات زیر توجه کرد:

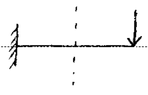
۱) به ازای هر بار متمرکز در تیر (از جمله واکنش‌های تکیه‌گاهی) نیاز به یک مقطع قبل و بعد از بار متمرکز می‌باشد

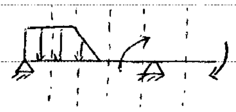
۲) اگر شکل بار گسترده در طول تیر تغییر کند به ازای هر قطعه نیاز به یک برش است

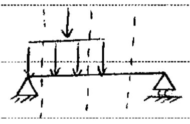
۳) اگر تکه‌ای از تیر شامل بار گسترده و تکه دیگر فاقد بار گسترده باشد برای هر یک از دو قسمت نیز یک مقطع مورد نیاز است

نکته) ترجیحاً باید یک مبدأ ثابت در انتهای سمت چپ تیر در نظر گرفت و تمامی مقادیر را نسبت به این مبدأ ثابت محاسبه کرد









در رسم دیاگرام‌ها فقط در مورد محاسبه واکنش‌های تکیه‌گاهی می‌توان بارهای گسترده را به بار متمرکز تبدیل کرد

۲) روش محاسبه سریع: در این روش از یکی از دو انتهای تیر شروع کرده و با کمک یک سری قواعد ساده شده دیاگرام‌ها را ترسیم می‌کنیم برخی از این قواعد به شرح زیر است:

۱- بار وارد بر تیر، دیاگرام برش و دیاگرام لنگر نسبت به هم دارای روابط مشتق و انتگرال می‌باشد به این گونه که دیاگرام لنگر انتگرال دیاگرام برش و دیاگرام برش، انتگرال معادله بار وارد بر تیر است برعکس آن معادله بار وارد بر تیر مشتق دیاگرام برش و دیاگرام برش مشتق دیاگرام خمش است در قسمت‌های بعدی به استفاده‌هایی که از این نکات می‌شود اشاره می‌شود

۲_ در قسمتی که به تیر باری وارد نمی‌شود دیاگرام برش خط مستقیم و دیاگرام لنگر خط مایل است

۳_ در محل بارهای متمرکز در دیاگرام برش ایجاد جهش به مقدار بار متمرکز و هم جهت با آن (در صورت حرکت از سمت چپ به راست) خواهیم بود در همان نقطه در دیاگرام لنگر یک شکستگی ایجاد می‌شود

۴_ در محل لنگر متمرکز دیاگرام برش بدون تغییر می‌ماند اما در دیاگرام لنگر یک جهش ایجاد می‌شود این جهش با توجه به مقدار گشتاور وارده می‌باشد در ترسیم چپ به راست گشتاور متمرکز ساعتگرد مثبت فرض می‌شود

۵_ در محل اعمال بار گسترده یکنواخت نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است

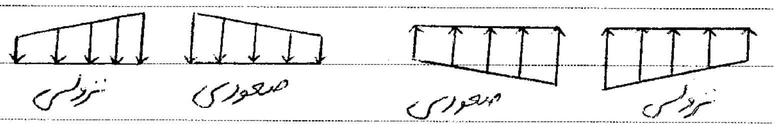
۶_ در محل بار گسترده مثلثی نمودار برش درجه (۲) و نمودار لنگر درجه (۳) می‌شود

۷_ هر جا مقدار برش مثبت باشد نمودار لنگر صعودی است در غیر اینصورت نزولی است

۸_ هر جا بار گسترده وارد بر تیر رو به پایین باشد نمودار برش نزولی و نمودار لنگر دارای خم رو به پایین است (بار رو به پایین منفی فرض می‌شود) و بالعکس

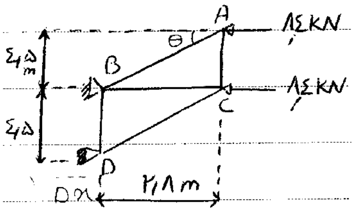
۹_ در مورد بارهای گسترده غیر یکنواخت هرگاه بار صعودی باشد نمودار برش دارای خم رو به بالا خواهد بود و بالعکس

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن بار باید از چپ به راست حرکت کنیم و همچنین توجه کنیم که بار با جهت پایین منفی و با جهت بالا مثبت است



۱۰_ مقدار لنگر در هر نقطه از تیر برابر انتگرال نمودار برش از ابتدا تا آن نقطه می‌باشد البته اگر در این محدوده به تیر گشتاور متمرکزی وارد شده باشد باید این گشتاور متمرکز به سطح زیر نمودار اضافه شود

مثال: با استفاده از روش مفصل نیروی اعضای خرپای شکل زیر را محاسبه کنید؟



$J=۴ \;,\; n=۵ \;,\; r=۳$

$۲\times۴ = ۵+۳ = ۸ \Rightarrow$ معین است

$\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow B_y = ۰$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = ۰ \Rightarrow ۸٫۴\times۹ + ۸٫۴\times۴٫۵ - B_x\times۴٫۵ = ۰$

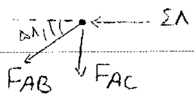
$\Rightarrow B_x = ۲۵٫۲\,KN$

$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow D_x + ۲۵٫۲ - ۸٫۴ - ۸٫۴ = ۰$

$\Rightarrow D_x = -۸٫۴\,KN \Rightarrow D_x = \overleftarrow{۸٫۴\,KN}$

از یکی از دو گره A و D می‌توانیم شروع کنیم

گره A: $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{۴٫۵}{۲٫۸}\right) = ۰ \Rightarrow \theta = ۵۸٫۱^\circ$



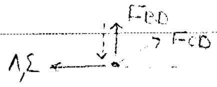
$\Rightarrow \Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -۸٫۴ - F_{AB}\cos ۵۸٫۱ = ۰$

$\Rightarrow F_{AB} = -۱۵٫۹ \Rightarrow F_{AB} = ۱۵٫۹\,KN\,(C)$

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow F_{AC} + ۱۵٫۹\times\sin ۵۸٫۱ = ۰$

$\Rightarrow F_{AC} = ۱۳٫۵\,(KN)\,(T)$

گره D:



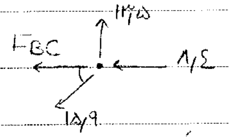
$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -۸٫۴ + F_{CD}\cos ۵۸٫۱ = ۰$

$\Rightarrow F_{CD} = ۱۵٫۹\,KN\,(T)$

$\uparrow \Sigma F_y = ۰ \Rightarrow F_{BD} + ۱۵٫۹\sin ۵۸٫۱ = ۰ \Rightarrow F_{BD} = -۱۳٫۵$

$F_{BD} = ۱۳٫۵\,(C)$

گره C:

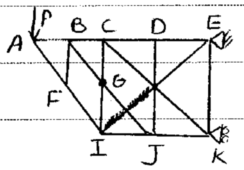


$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -F_{BC} - ۸٫۴ - ۱۵٫۹\cos ۵۸٫۱ = ۰$

$F_{BC} = -۱۶٫۸ \Rightarrow F_{BC} = ۱۶٫۸\,(C)$

(برای کنترل) $\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۳٫۵ - ۱۵٫۹\sin ۵۸٫۱ = ۰$

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای صفر نیرویی را مشخص کنید؟



تنها گره دو عضوی گره A است که این گره دارای نیرو می‌باشد. نیروی وارد به گره موازی هیچ یک از دو عضو متصل به گره نیست. اگر موازی یک عضو بود، عضو دیگر صفر نیرویی بود. بر این اساس دو عضو متصل به این گره صفر نیرویی نیستند.

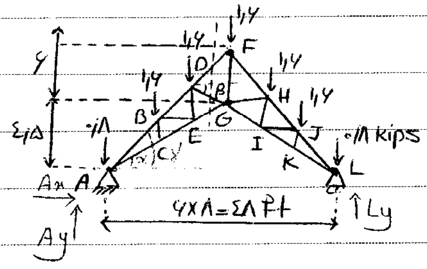
گره‌های سه عضوی با دو عضو موازی:

گره‌های D, E : BF, DH

گره B : BG　　　　گره J : JH

گره G : JG　　　　گره H : HE

مثال: در خرپای شکل زیر به روش مقطع نیروی عضوهای DF، DG و EG را محاسبه کنید؟



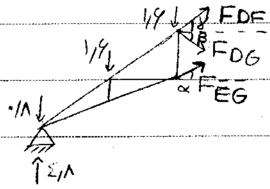
یک مقطع عمودی مطابق شکل هر سه عضو مورد نظر را قطع می‌کند و دارای تمامی شرایط نیز می‌باشد. یک سمت چپ را انتخاب می‌کنیم. در این سمت واکنش تکیه‌گاه A وجود دارد که ابتدا باید با رسم پیکر آزاد کل خرپا واکنش‌های این تکیه‌گاه را محاسبه کنیم.

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

$\circlearrowleft \Sigma M_L = 0 \Rightarrow -A_y \times ۴۸ + ۰/۸ \times ۴۸ + ۱/۶ \times (۴۰ + ۳۲ + ۲۴ + ۱۶ + ۸) = 0$

$A_y = ۴/۸ \text{ kips} \uparrow$

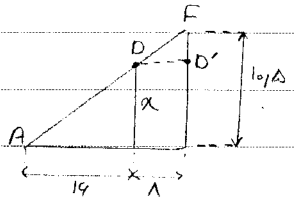
چون خرپا از لحاظ شکل و بارگذاری متقارن است واکنش عمودی دو تکیه‌گاه با هم برابر است و مقدار هر کدام نصف مجموع بارهای عمودی وارد بر خرپا است.



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{۴/۵}{۲۴}\right) = ۱۰/۶^\circ$

$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{۱۰/۵}{۲۴}\right) = ۲۳/۶^\circ$

Tamasha



تشابه : $\frac{۱۶}{۲۴} = \frac{x}{۱۰٫۵} \Rightarrow x = ۷$

$\Rightarrow D'F = ۱۰٫۵ - ۷ = ۳٫۵$

$D'G = ۶ - ۳٫۵ = ۲٫۵$

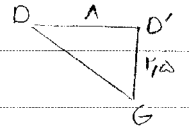
$\tan\beta = \frac{D'G}{DD'} = \frac{۲٫۵}{۸} \Rightarrow \beta = \tan^{-1}\left(\frac{۲٫۵}{۸}\right) = ۱۷٫۳۵^\circ$

$F_{DG}$ محاسبه : $\curvearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow -۱٫۶ \times ۸ - ۱٫۶ \times ۱۶ - F_{DG} \times AD \times \sin(\beta + \gamma) = ۰$

$AD = \sqrt{۱۶^۲ + ۷^۲} = ۱۷٫۴۶$ $\quad \beta + \gamma = ۱۷٫۳۵ + ۲۳٫۶ = ۴۰٫۹۵^\circ \Rightarrow F_{DG} = -۳٫۳۵$

$\Rightarrow F_{DG} = ۳٫۳۵\ (C)$

$F_{DF}$ محاسبه : $\curvearrowleft \Sigma M_G = ۰ \Rightarrow -۴٫۸ \times ۲۴ + ۰٫۸ \times ۲۴ + ۱٫۶ \times ۱۶ + ۱٫۶ \times ۸$
$- F_{DF} \times DG \times \sin(\alpha + \beta) = ۰$



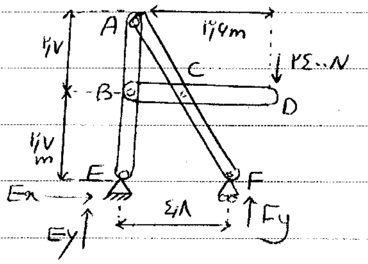
$\Rightarrow DG = \sqrt{۸^۲ + ۲٫۵^۲} = ۸٫۳۸ \Rightarrow F_{DF} = -۱۰٫۴۸$

$\Rightarrow F_{DF} = ۱۰٫۴۸\ (C)$

$F_{EG}$ محاسبه : $\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow -۱۰٫۴۸ \cos\gamma - ۳٫۳۵ \cos\beta + F_{EG} \times \cos\alpha = ۰$

$F_{EG} = ۱۳٫۰۲\ \text{kips}\ (T)$

مثال : مولفه‌های نیروی وارد بر هر عضو از قاب نشان داده شده در شکل را تعیین کنید P



مجموعه از سه قطعه ABE و ACF و BCD تشکیل شده است

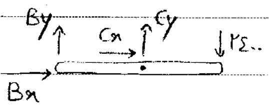
$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow E_x = ۰$

$\curvearrowleft \Sigma M_E = ۰ \Rightarrow F_y \times ۴٫۸ - ۲۴۰۰ \times ۳٫۶ = ۰$

$F_y = ۱۸۰۰\ N$

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۱۸۰۰ - ۲۴۰۰ + E_y = ۰ \quad E_y = ۶۰۰\ N \uparrow$

عضو BCD :



$$\circlearrowleft \Sigma M_B = ۰ \quad -۲۴۰۰ \times ۳/۶ + C_y \times BC = ۰$$

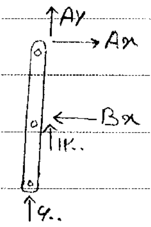
$$\Rightarrow C_y = ۳۶۰۰\,N \uparrow$$

تشابه : $\frac{BC}{۴/۸} = \frac{۲/۷}{۵/۴} \Rightarrow BC = ۲/۴$

$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow B_y + ۳۶۰۰ - ۲۴۰۰ = ۰ \Rightarrow B_y = -۱۲۰۰ \Rightarrow B_y = ۱۲۰۰ \downarrow$$

$$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow B_x + C_x = ۰ \quad ①$$

عضو ABE :



$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۶۰۰ + ۱۲۰۰ + A_y = ۰$$

$$A_y = -۱۸۰۰ \rightarrow A_y = ۱۸۰۰ \downarrow$$

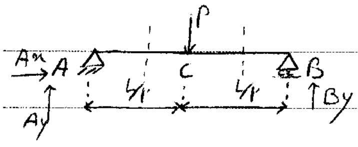
$$\circlearrowleft \Sigma M_A = ۰ \Rightarrow -B_x \times ۱/۷ = ۰ \Rightarrow B_x = ۰$$

$$① \Rightarrow ۰ + C_x = ۰ \Rightarrow C_x = ۰$$

$$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

با توجه به آنکه تمام مجهولات محاسبه شده نیازی به رسم دیاگرام آزاد قطعه ACF نیست در صورت تمایل فقط جهت کنترل جواب ها این قطعه را نیز رسم و یکی از معادلات تعادل آن را می نویسیم

مثال : نمودار نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر با بارگذاری نشان داده شده را ترسیم کنید؟



$$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

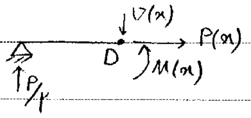
$$\Sigma M_B = ۰ \Rightarrow A_y \cdot L + \frac{PL}{۲} = ۰ \Rightarrow A_y = \frac{P}{۲}$$

$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow P/۲ - P + B_y = ۰ \Rightarrow B_y = P/۲$$

روش مقطع : A به مبدأ

به دو مقطع نیاز داریم

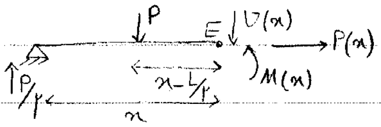
۱) $۰ \leqslant x < L/۲ \Rightarrow$



$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -V(x) + P/۲ = ۰ \Rightarrow V(x) = P/۲$$

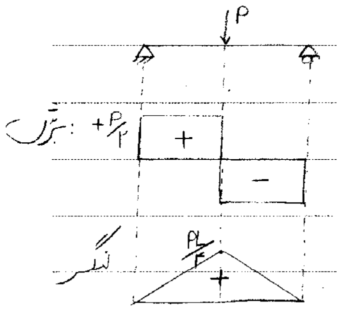
$$\circlearrowleft \Sigma M_D = ۰ \quad -\frac{Px}{۲} + M(x) = ۰ \rightarrow M(x) = \frac{Px}{۲}$$

۲) $L/۲ \leqslant x \leqslant L$

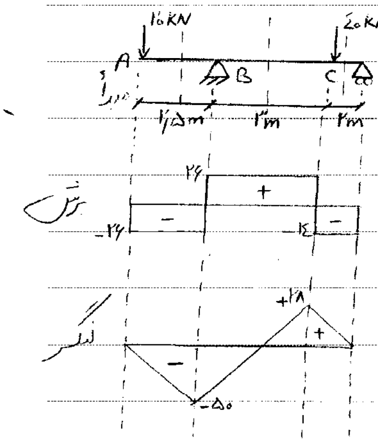

P
E
V(x)
P(x)
M(x)
P/۲
x-L/۲
x

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow P/۲ - P - V(x) = ۰ \Rightarrow V(x) = -P/۲$

$\curvearrowleft \Sigma M_E = ۰ \Rightarrow \frac{-Px}{۲} + P(x - L/۲) + M_x = ۰ \Rightarrow M(x) = P/۲\,(L - x)$


P
برش: +P/۲
+
−
لنگر
PL/۴
+

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده در شکل را رسم کنید.


۲۰kN
۴۰kN
A
B
C
D
مبدا
۱٫۵m
۳m
۲m
برش
۲۶
+
−۲۰
−
−۱۴
−
لنگر
+۲۸
+
−
−۵۰

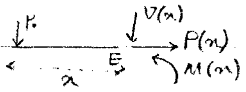
$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow D_x = ۰$

$\curvearrowleft \Sigma M_D = ۰ \Rightarrow ۲۰ \times ۷٫۵ - B_y \times ۵ + ۴۰ \times ۲ = ۰$

$B_y = ۴۶\,kN \uparrow \qquad \Sigma F_y = ۰$

$-۲۰ + ۴۶ - ۴۰ + D_y = ۰ \Rightarrow D_y = ۱۴\,kN \uparrow$

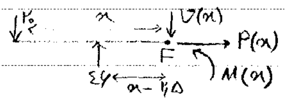
$۰ \leqslant x < ۱٫۵ \Rightarrow$


۲۰
E
x
V(x)
P(x)
M(x)

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -۲۰ - V(x) = ۰ \Rightarrow V(x) = -۲۰$

$\Sigma M_E = ۰ \Rightarrow +۲۰x + M(x) = ۰ \quad M(x) = -۲۰x$

$۱٫۵ \leqslant x < ۵٫۵ \Rightarrow$

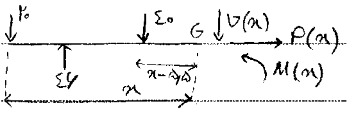

۲۰
x
V(x)
P(x)
F
M(x)
۴۶
x-۱٫۵

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -۲۰ + ۴۶ - V(x) = ۰ \Rightarrow V(x) = ۲۶$

$\curvearrowleft \Sigma M_F = ۰ \Rightarrow +۲۰x - ۴۶(x - ۱٫۵) + M(x) = ۰$

$M(x) = ۲۶x - ۱۱۵$

$۵/۵ \leqslant x \leqslant ۷/۵ \Rightarrow$

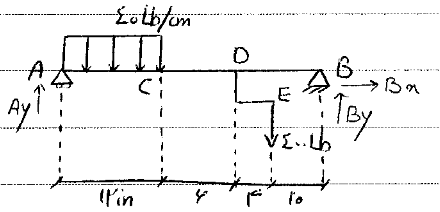

۲۰
۴۰
G
V(x)
P(x)
M(x)
۴۶
x−۵/۵
x

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow -۲۰ + ۴۶ - ۴۰ - V(x) = ۰ \Rightarrow V(x) = -۱۴$

$\curvearrowleft \Sigma M_G = ۰ \Rightarrow ۲۰x - ۴۶(x - ۲/۵) + ۴۰(x - ۵/۵) + M(x) = ۰ \Rightarrow M(x) = -۱۴x + ۱۰۵$

معادله لنگر بصورت معادله خط است برای رسم یک خط کافیست که نقاط ابتدا و انتهای محدوده را عددگذاری کرده و لنگر در آنها را محاسبه کنیم

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر AB را ترسیم کنید.


۴۰ Lb/in
A
C
D
E
B
Bx
Ay
By
۴۰۰ Lb
۱۲ in
۶
۴
۱۰

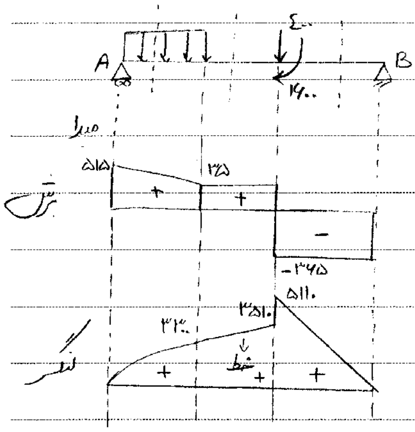
$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow D_x = ۰$

$\curvearrowleft \Sigma M_B = ۰ \Rightarrow -A_y \times ۳۲ + (۴۰ \times ۱۲) \times ۲۶ + ۴۰۰ \times ۱۰ = ۰$

$\Rightarrow A_y = ۵۱۵\ Lb \uparrow$

$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۵۱۵ - (۴۰ \times ۱۲) - ۴۰۰ + B_y = ۰$

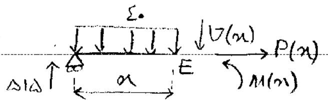
$B_y = ۳۶۵\ Lb$


A
B
۴۰۰
۱۶۰۰
مبدا
۵۱۵
۳۵
+
+
−
−۳۶۵
برش
۵۱۱۰
۳۵۱۰
۳۲۱۰
خط
+
+
+
لنگر

نیروی وارد بر نقطه E را به همراه لنگری که ایجاد می‌کند به نقطه D منتقل می‌کنیم و قطعه DE را از تیر حذف می‌کنیم

به سه مقطع مطابق شکل نیاز داریم

$۰ \leqslant x \leqslant ۱۲$


۴۰
V(x)
P(x)
M(x)
E
۵۱۵
x

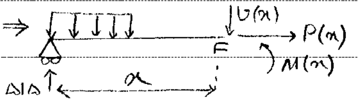
$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۵۱۵ - ۴۰x - V(x) = ۰$

$V(x) = ۵۱۵ - ۴۰(x)$

$\curvearrowleft \Sigma M_E = ۰ \Rightarrow -۵۱۵x + (۴۰x)\, x/۲ + M(x) = ۰$

$M(x) = -۲۰x^۲ + ۵۱۵x$

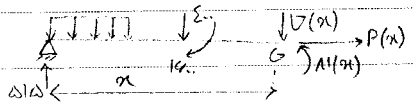
$۱۲ < x < ۱۸ \Rightarrow$


V(x)
P(x)
M(x)
E
۵۱۵
x

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۵۱۵ - ۴۰\times۱۲ - V(x) = ۰ \longrightarrow V(x) = ۳۵\,Lb$

$\circlearrowleft \sum M_F = ۰ \Rightarrow -۵۱۵x + (۴۰\times۱۲)\times(x-۶) + M(x) = ۰ \quad M(x) = ۳۵x + ۲۸۸۰$

$۱۸ \leqslant x \leqslant ۳۲$



$\sum F_y = ۰ \Rightarrow ۵۱۵ - ۴۰\times۱۲ - ۴۰۰ - V(x) = ۰$

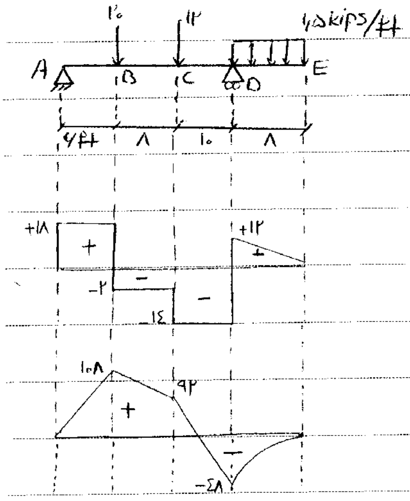
$V(x) = -۳۶۵$

$\circlearrowleft \sum M_G = ۰ \Rightarrow -۵۱۵x + (۴۰\times۱۲)(x-۶) + ۴۰۰(x-۱۸) - ۱۶۰۰ + M(x) = ۰$

$\Rightarrow M(x) = ۱۱۶۸۰ - ۳۶۵x$

در تکه اول منحنی گشتاور سهمی است چون ضریب $x^2$ منفی است خم منحنی رو به پایین است

مثال (۷-۴): نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر با بارگذاری نشان داده شده ترسیم کنید.



$\sum F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$

$\circlearrowleft \sum M_A = ۰ \Rightarrow -(۱٫۵\times۸)\times۲۸ + D_y\times۲۴ - ۱۲\times۱۴ - ۲۰\times۶ = ۰$

$\Rightarrow D_y = ۲۶\,kips$

$\sum F_y = ۰ \Rightarrow A_y - ۲۰ - ۱۲ + ۲۶ - ۱٫۵\times۸ = ۰$

$A_y = ۱۸\,kips$

روش سریع:

$V_E = ۱۲ - ۸\times۱٫۵ = ۰$

$M_B = ۱۸\times۶ = ۱۰۸$

$M_C = ۱۰۸ - ۲\times۸ = ۹۲$

$M_D = ۹۲ - ۱۴\times۱۰ = -۴۸$

$M_E = -۴۸ + \frac{۱۲\times۸}{۲} = ۰ \checkmark$

در مورد نمودارهای ترسیم شده نکات زیر قابل توجه است:

۱) ابتدا و انتهای نمودارها باید صفر شود

۲) در محل هایی که به تیر باری وارد نشده است نمودار برش خط مستقیم و نمودار گشتاور خط مورب

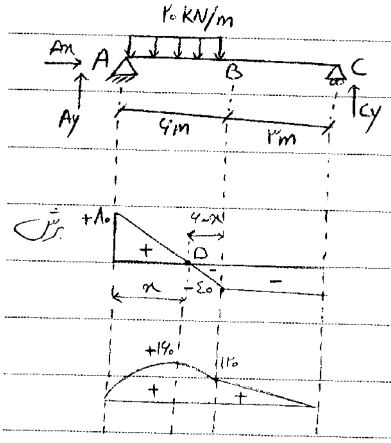
Tamasha

۳) در محل های اعمال بار متمرکز در نمودار برش جهش به میزان بار در نمودار لنگر شکستگی ایجاد شده است

۴) در محل بار گسترده نمودار برش خط مایل و نمودار لنگر سهمی است چون بار گسترده رو به پایین است منحنی برش نزولی و منحنی لنگر دارای خم رو به پایین است

۵) برای رسم نمودار لنگر از سطح زیر نمودار برش استفاده شده است

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر با بارگذاری نشان داده شده را رسم نمایید؟



$\Sigma F_x=۰ \Rightarrow A_x=۰$

$\Sigma M_C=۰ \Rightarrow -A_y\times ۹+(۲۰\times ۶)\times ۶=۰ \Rightarrow A_y=۸۰kN$

$\Sigma F_y=۰ \Rightarrow ۸۰-۲۰\times ۶+C_y=۰ \Rightarrow C_y=+۴۰$

روش سریع:

$V_B=۸۰-۲۰\times ۶=-۴۰$

تشابه: $\frac{x}{۶-x}=\frac{۸۰}{۴۰} \Rightarrow x=۴m$

نقطه D که برش صفر است نقطه اکسترمم نمودار لنگر است

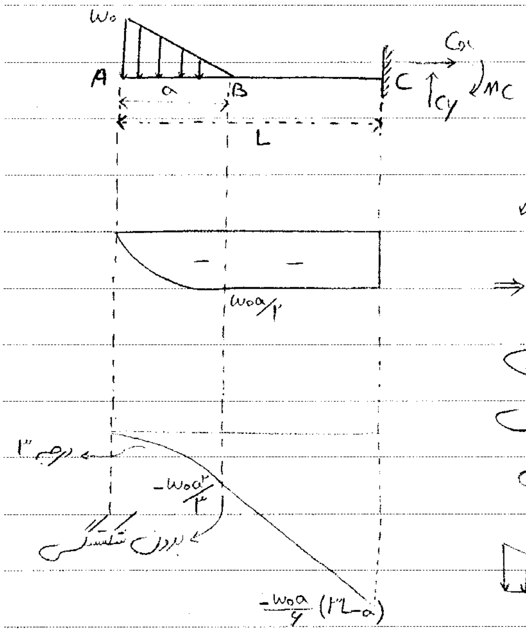
$M_D=\frac{۸۰\times ۴}{۲}=۱۶۰ \qquad M_B=۱۶۰-\frac{۴۰\times ۲}{۲}=۱۲۰$

$M_C=۱۲۰-۴۰\times ۳=۰ \checkmark$

نکته: چون بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر نیز رو به پایین است در نقطه B با توجه به اینکه بار متمرکزی اعمال نشده است بایستی خط در سمت راست نقطه B با شیب منحنی در سمت چپ نقطه B در نمودار لنگر یکسان باشد (شکستگی نداشته باشد)

Tamasha

مثال: نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی تیر شکل زیر را مشخص کنید؟



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$

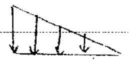
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \frac{-W_0 a}{۲} + C_y = 0$$

$$\Rightarrow C_y = \frac{W_0 a}{۲}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow +\left(\frac{W_0 a}{۲}\right) \times \left(L - a/۳\right) - M_C = 0$$

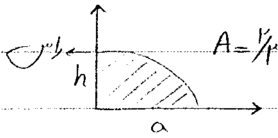
$$\Rightarrow M_C = \frac{W_0 a}{۶}(۳L - a)$$

چون بار وارد بر تیر گسترده مثلثی است نمودار برش بصورت سهمی و نمودار لنگر درجه ۳ است چون جهت بار گسترده رو به پایین است خم منحنی لنگر رو به پایین است


⇒ صعودی ⇒ خم منحنی برش رو به بالا

بار گسترده از مقدار $w_0$- در نقطه A به صفر در نقطه B می رسد پس نمودار بار حالت نزولی دارد و مشتق بار که مشتق دوم برش است مثبت خواهد بود و در نتیجه خم منحنی برش رو به بالا است

$$V_B = -W_0a/۲$$



$$A = \tfrac{1}{۳} ah \qquad M_B = -\tfrac{1}{۳} \frac{W_0 a}{۲} \times a = \frac{-W_0 a^۲}{۳}$$

می توان بجای سطح زیر نمودار مستقیما از تیر از سمت چپ یا راست نسبت به نقطه B لنگرها را محاسبه و با هم جمع کرد در این حالت باید توجه داشت که لنگر ساعتگرد مثبت فرض شود

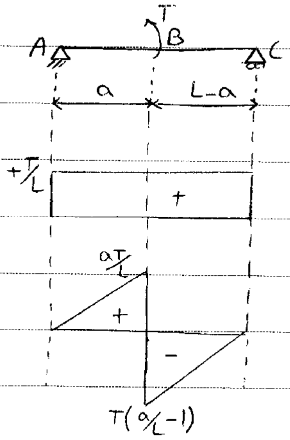
$$M_B = -\left(\frac{W_0 a}{۲}\right) \times \tfrac{1}{۳} a = \frac{-W_0 a^۲}{۳}$$

$$M_C = \frac{-W_0 a^۲}{۳} - \frac{W_0 a}{۲}(L-a) = \frac{-W_0 a}{۶}(۳L-a)$$

نکته: در نقطه C اگر لنگر متمرکز وجود داشت یک جهش در نمودار ایجاد می شود چون از چپ به راست نمودار را ترسیم کرده ایم لنگر پادساعتگرد مثبت فرض می شود در نقطه B با توجه به عدم وجود بار متمرکز نباید بین دو تکه نمودار شکستگی به وجود آید

Tamasha

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را رسم کنید؟



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_C = 0 \Rightarrow -A_y \times L + T = 0 \Rightarrow A_y = T/L$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T/L + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -T/L \downarrow$$

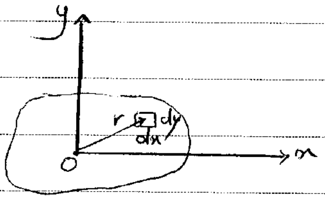
$$M_B = T/L \times a$$

$$M_C = T(a/L - 1) + T/L \times (L - a) = 0$$

$$aT/L - T = T(a/L - 1)$$

لنگر متمرکز در نقطه B تأثیری بر نمودار برش ندارد اما بر نمودار لنگر یک جهش ایجاد می‌کند با توجه به آنکه این لنگر پادساعتگرد است و نمودار را از چپ به راست ترسیم می‌کنیم این جهش منفی است

ممان دوم اینرسی:



$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$

$$J_0 = I_x + I_y$$

$J_0$: گشتاور قطبی نسبت به نقطه O

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad , \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$r_0^2 = r_x^2 + r_y^2 \qquad J_0 = \int r^2 dA$$

$I_x, I_y$: ممان‌های دوم اینرسی نسبت به دو محور x و y

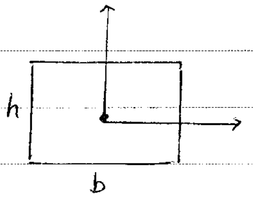
$r_x, r_y$: شعاع‌های چرخش یا ژیراسیون نسبت به محورهای x و y

$$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$$

$r_0$: شعاع چرخش قطبی نسبت به مبدا مختصات

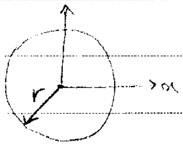
Tamasha

ممان های اینرسی نسبت به چند شکل خاص:



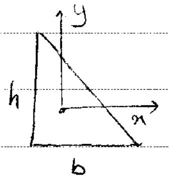
$I_x = \frac{bh^3}{12}$ , $I_y = \frac{b^3h}{12}$ , $r_x = \frac{h}{2\sqrt{3}}$ , $r_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$

$J_o = \frac{bh}{12}(b^2+h^2)$ $r_o = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{2\sqrt{3}}$ , $I_{xy}=0$



$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $J_o = \frac{\pi r^4}{2}$ $r_x = r_y = r/2$

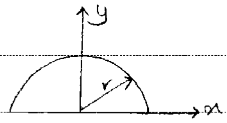
$r_o = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ $I_{xy}=0$



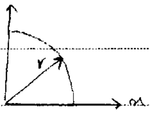
$I_x = \frac{bh^3}{36}$ , $I_y = \frac{b^3h}{36}$ $J_o = \frac{bh}{36}(b^2+h^2)$

$r_x = \frac{h}{3\sqrt{2}}$ $r_y = \frac{b}{3\sqrt{2}}$ , $r_o = \frac{\sqrt{b^2+h^2}}{3\sqrt{2}}$

اگر یکی از دو محور x و y محور تقارن شکل باشد $I_{xy}$ (حاصلضرب سطح) صفر است



$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{8}$ $J_o = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_{xy}=0$



$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ , $J_o = \frac{\pi r^4}{8}$ $I_{xy} \neq 0$

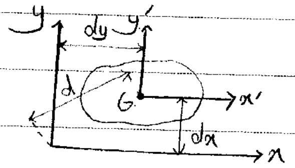
قضیه محورهای موازی:

اگر محاسبه ممان اینرسی حول محوری غیر گذرنده از مرکز سطح مورد نظر باشد به شکل زیر عمل می کنیم:

ابتدا محور دیگری به موازات محور اول از مرکز سطح عبور می دهیم و ممان اینرسی

Tamasha

حول محور جدید را محاسبه می کنیم اگر به مقدار محاسبه شده حاصلضرب مساحت مقطع در توان دوم فاصله دو محور اضافه شود ممان اینرسی حول محور اول بدست می آید



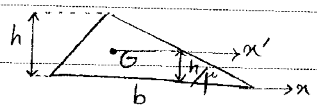
$$I_x = I_{x'} + A.d_x^2$$

$$I_y = I_{y'} + A.d_y^2$$

$$J_o = J_G + A.d^2$$

$$d^2 = d_x^2 + d_y^2$$

مثال: محاسبه ممان دوم اینرسی مثلث نسبت به قاعده آن؟



$$I_{x'} = \frac{bh^3}{36} \quad , \quad A = \frac{bh}{2} \quad , \quad d = h/3$$

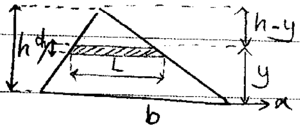
$$I_x = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{12}$$

ممان اینرسی اشکال مرکب:

در اشکال مرکب آن را به چند شکل ساده تقسیم می کنیم و ممان اینرسی اشکال ساده تر را حول محور مورد نظر بدست می آوریم و با هم جمع می کنیم اگر محور مورد نظر از مرکز سطح اشکال ساده شده عبور نکند با استفاده از قضیه محورهای موازی از آن کمک بگیریم

$$I = \sum I_i$$

مثال: گشتاور دوم اینرسی یک مثلث حول قاعده اش را با روش انتگرال گیری محاسبه کنید؟



تشابه: $\frac{L}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow L = b \times \frac{h-y}{h}$

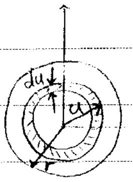
$$dA = L.dy = b \times \frac{h-y}{h} dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 \left(b \times \frac{h-y}{h} dy\right) = b/h \int_0^h y^2 (h-y) dy$$

Tamasha

$$= \frac{b}{h}\int_0^h (y^2h - y^3)\,dy = \frac{b}{h}\left[\frac{y^3h}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{bh^4}{12h} = \frac{bh^3}{12}$$

مثال: گشتاور لختی قطبی یک دایره را نسبت به مرکز آن با روش انتگرال گیری بدست آورید.



$$J_o = \int r^2 dA$$

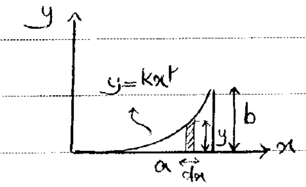
$$I_x = \int y^2 dA$$

$$dA = 2\pi u\,du$$

$$J_o = \int_0^r u^2(2\pi u\,du) = \int_0^r 2\pi u^3 du = 2\pi\left[\frac{u^4}{4}\right]_0^r$$

$$= \frac{2\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه گشتاور دوم اینرسی شکل زیر حول محور x و y و محاسبه شعاع های ژیراسیون حول این دو محور.

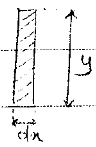


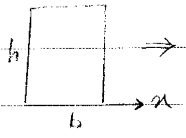
$$y=b \text{ و } x=a \Rightarrow b=ka^2 \Rightarrow k=\frac{b}{a^2}$$

$$y = \frac{b}{a^2}x^2$$

$$I_x = \int dI_x$$

می توانیم برای المان انتخاب شده‌مان ممان دوم اینرسی را مستقیماً انتگرال گیری کنیم





$$\rightarrow I_x = \frac{bh^3}{3} \Rightarrow dI_x = \frac{dx \times y^3}{3}$$

$$I_x = \int_0^a \frac{y^3}{3}dx = \int_0^a \frac{(\frac{b}{a^2}x^2)^3 dx}{3}$$

$$= \int_0^a \frac{b^3}{3a^6}x^6 dx = \frac{b^3}{3a^6}\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^a = \frac{b^3a}{21}$$

در این حالت چون برای المان مقدار y متغیر بود استفاده از روش مسائل قبل ساده نبود

Tamasha

$I_y = \int x^2 dA$

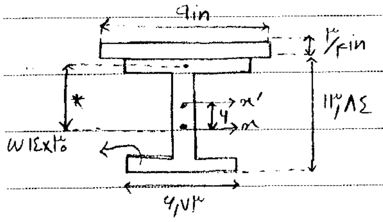
در اینجا چون برای المان انتخاب شده x مقداری ثابت است و برای نقاط مختلف المان تغییر نمی‌کند نیازی به استفاده از روش قبلی نیست و از روش عادی استفاده می‌کنیم

$$I_y = \int x^2 \times (y\,dx) = \int x^2 \frac{b}{a^2} x^2 dx = \int_0^a \frac{b}{a^2} x^4 dx$$

$$= \frac{b}{a^2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a = \frac{b}{a^2} \times \frac{a^5}{5} = \frac{ba^3}{5}$$

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{b^3a/21}{ab/3}} = \frac{b}{\sqrt{7}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{\frac{ba^3}{5}}{ab/3}} = a \times \sqrt{\frac{3}{5}}$$

مثال: ممان دوم اینرسی و شعاع چرخش مقطع نشان داده شده در شکل زیر را نسبت به محور گذرنده از مرکز سطح آن بدست آورید.



ابتدا محاسبه محل مرکز سطح شکل مرکب:
وسط ارتفاع مقطع I شکل را مبنا در نظر گرفتیم
و فاصله مرکز سطح تا این محور مبنا را از روابط محاسبه
مراکز سطح اشکال مرکب محاسبه می‌کنیم

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} \qquad W14\times30 \begin{cases} A = 8.85\ in^2 \\ I_x = 291\ in^4 \end{cases}$$

$$* = \frac{13.84}{2} + \frac{3/4}{2} = 7.295$$

$$I_{x'} = \Sigma I_{x'_i} = I_{x'_1} + I_{x'_2}$$

$$\bar{y} = \frac{8.85 \times 0 + (9 \times 3/4) \times 7.295}{8.85 + 9 \times 3/4} = 3.156\ in$$

$$\text{ورق}\ I_{x'_1} = \frac{9 \times (3/4)^3}{12} + (9 \times 3/4) \times (7.295 - 3.156)^2 \simeq 116\ in^4$$

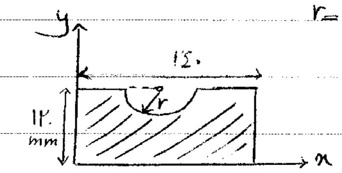
$$I_{x'_2} = 291 + 8.85 \times 3.156^2 = 379.1\ in^4 \qquad \Rightarrow I_{x'} \simeq 495.1\ in^4$$

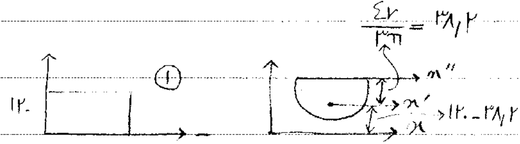
$$r_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} \Rightarrow \quad A = 8.85 + 9 \times 3/4 = 15.6 \quad r_{x'} \simeq \sqrt{\frac{495.1}{15.6}} = 5.63\ in$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را نسبت به محور x محاسبه کنید؟

شکل را بصورت یک مستطیل که از آن یک نیم دایره کم شده در نظر می گیریم

$r = 90\,mm$





$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2}$$

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3} = \frac{240 \times 120^3}{3} = 138.2 \times 10^6\,mm^4$$

مستطیل نسبت به قاعده

چون محور x از مرکز سطح نیم دایره نمی گذرد باید از قضیه محورهای موازی استفاده کنیم در اینجا محور x' را از مرکز نیم دایره عبور می دهیم اما ممان اینرسی نیم دایره حول این محور را نداریم و ممان اینرسی نیم دایره حول محور گذرنده از مرکز نیم دایره را داریم که ابتدا باید با کمک آن در قضیه محورهای موازی $I_{x'}$ را بدست آوریم

$$I_{x''} = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow \frac{\pi \times 90^4}{8} = I_{x'} + \left(\frac{\pi \times 90^2}{2}\right) \times 38.2^2$$

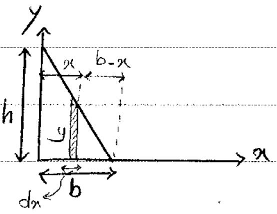
$$\Rightarrow I_{x'} = 7.2 \times 10^6\,mm^4$$

حال دوباره از قضیه محورهای موازی جهت محاسبه ممان اینرسی نیم دایره حول محور x کمک می گیریم

$$I_{x_2} = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow I_{x_2} = 7.2 \times 10^6 + \left(\frac{\pi \times 90^2}{2}\right) \times 81.8^2 = 92.3 \times 10^6\,mm^4$$

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2} = 138.2 \times 10^6 - 92.3 \times 10^6 = 45.9 \times 10^6\,mm^4$$

مثال: برای مثلث شکل زیر مطلوبست محاسبه حاصلضرب سطح نسبت به محورهای x و y برای مثلث شکل زیر؟

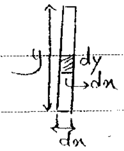


$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

تشابه $\Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{b-x}{b} \Rightarrow y = \frac{b-x}{b} h$

در المان انتخاب شده x ثابت و y متغیر است پس ابتدا باید حول المان باریک انتگرال گیری مقدار حاصلضرب سطح را محاسبه کرده و سپس دوباره آن انتگرال گیری شود

$$I_{xy} = \int xy\,dA = \int dI_{xy} \qquad xy\,dA = dI_{xy}$$



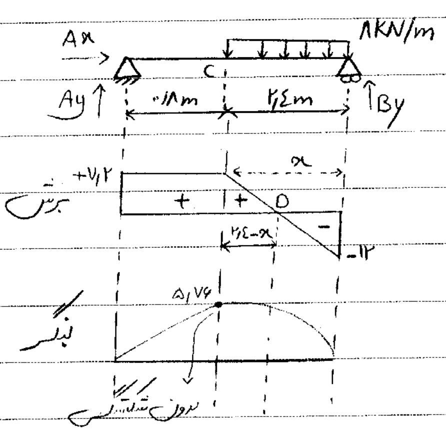
$$dI_{xy} = \int xy\,dA = \int_۰^y xy\,dx.dy$$

$$= x\,dx\left[\frac{y^۲}{۲}\right]_۰^y = \frac{xy^۲}{۲}dx$$

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int_۰^b \frac{xy^۲}{۲}dx = \int_۰^b \frac{x}{۲}\times\left(\frac{b-x}{b}\times h\right)^۲dx = \frac{h^۲}{۲b^۲}\int_۰^b(b^۲x - ۲bx^۲ + x^۳)dx$$

$$= \frac{h^۲}{۲b^۲}\left[\frac{b^۲x^۲}{۲} - \frac{۲bx^۳}{۳} + \frac{x^۴}{۴}\right]_۰^b = \frac{h^۲}{۲b^۲}\left(\frac{b^۴}{۲} - \frac{۲b^۴}{۳} + \frac{b^۴}{۴}\right) = \frac{h^۲}{۲b^۲}\times\frac{b^۴}{۱۲} = \frac{h^۲b^۲}{۲۴}$$

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام برش و لنگر برای تیر با بارگذاری نشان داده شده؟



$$\Sigma F_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۰$$

$$\curvearrowleft \Sigma M_B = ۰ \Rightarrow -A_y \times ۳٫۲ + ۸ \times ۲٫۴ \times ۱٫۲ = ۰$$

$$A_y = ۷٫۲\,KN\uparrow$$

$$\Sigma F_y = ۰ \Rightarrow ۷٫۲ - ۸ \times ۲٫۴ + B_y = ۰ \Rightarrow B_y = ۱۲\,KN\uparrow$$

$$V_B = ۷٫۲ - ۸ \times ۲٫۴ = -۱۲$$

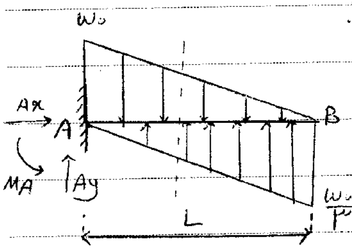
تشابه: $\frac{x}{۲٫۴ - x} = \frac{۱۲}{۷٫۲} \Rightarrow x = ۱٫۵\,m$

$$M_C = ۷٫۲ \times ۰/۸ = ۵٫۷۶$$

$$M_D = ۵٫۷۶ + ۷٫۲ \times ۰/۹ = ۹$$

$$M_B = ۹ - ۱۲ \times ۱٫۵ = ۰$$

مثال: دیاگرام برش و لنگر تیر شکل زیر را ترسیم کنید؟



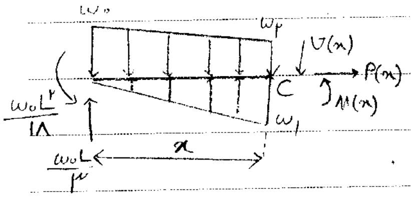
$$\Sigma F_x=0 \Rightarrow A_x=0$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow A_y-\frac{w_0L}{2}+\frac{w_0}{3}\times L/2=0$$

$$A_y=\frac{w_0L}{3}$$

$$\circlearrowleft \Sigma M_A=0 \Rightarrow M_A-\left(\frac{w_0L}{2}\right)L/3+\left(\frac{w_0}{3}\times L/2\right)\times 2L/3=0$$

$$\circlearrowleft M_A=\frac{w_0L^2}{18}$$

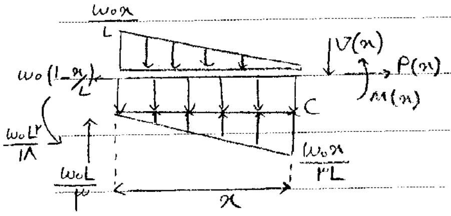


یک مقطع برای شکل کافیست

مقادیر $w_1$ و $w_2$ باید با توجه به تشابه در هر یک از دو مثلث پایین و بالا محاسبه شود

مثلث پایین: $\frac{w_1}{w_0/3}=\frac{x}{L} \Rightarrow w_1=\frac{w_0x}{3L}$

مثلث بالا: $\frac{w_2}{w_0}=\frac{L-x}{L} \rightarrow Lw_2=Lw_0-w_0x \Rightarrow w_2=\frac{Lw_0-w_0x}{L}=w_0\left(1-\frac{x}{L}\right)$



ذوزنقه بالا را به یک مستطیل و مثلث تجزیه می کنیم

$$\Rightarrow w_0-w_0(1-x/L)=w_0-w_0+\frac{w_0x}{L}=\frac{w_0x}{L}$$

$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow \frac{w_0L}{3}-\frac{w_0x}{L}\times\frac{x}{2}-w_0\left(1-\frac{x}{L}\right)x+\frac{w_0x}{3L}\times\frac{x}{2}-V(x)$$

$$=\frac{w_0L}{3}-\frac{w_0x^2}{2L}-w_0x+\frac{w_0x^2}{L}+\frac{w_0x^2}{6L}-V(x)$$

$$=\frac{w_0L}{3}-w_0x+\frac{2w_0x^2}{3L}-V(x)=0 \Rightarrow V(x)=\frac{2w_0x^2}{3L}-w_0x+\frac{w_0L}{3}$$

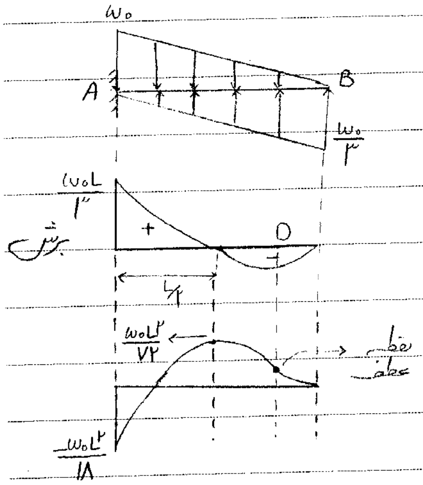
$$\circlearrowleft \Sigma M_C=0 \Rightarrow \frac{w_0L^2}{18}-\frac{w_0Lx}{3}+\left[\frac{w_0x}{L}\times\frac{x}{2}\right]\times\frac{2}{3}x+\left[w_0\left(1-\frac{x}{L}\right)x\right]x/2-$$

$$\left[\frac{w_0x}{3L}\times x/2\right]\times x/3+M(x)=0$$

$$\Rightarrow \frac{w_0L^2}{18}-\frac{w_0Lx}{3}+\frac{w_0x^2}{2}+\frac{w_0x^3}{L}\left[1/3-1/2-1/18\right]+M(x)=0$$

$$M(x)=\frac{2w_0x^3}{9L}-\frac{w_0x^2}{2}+\frac{w_0Lx}{3}-\frac{w_0L^2}{18}$$

Tamasha



باتوجه به معادله بدست آمده برای برش، نمودار برش یک سهمی است که چون ضریب $x^2$ مثبت است خم آن رو به بالا می‌باشد. برای رسم این سهمی مقدار برش در ابتدا و انتها و ترجیحاً نقطه‌ای که برش در آن صفر می‌شود را بدست می‌آوریم

$$V(0)=\frac{w_0L}{3} \quad و \quad V(L)=0$$

$$V(x)=0 \qquad \left(V(x)\times\frac{3L}{2w_0}\right) \Rightarrow x^2-\frac{3L}{2}x+\frac{L^2}{2}=0$$

$$\Delta=\left(\frac{3L}{2}\right)^2-\frac{4L^2}{2}\times 1=\frac{9L^2}{4}-\frac{4L^2}{2}=L^2/4$$

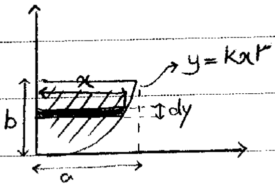
$$x=\frac{3L/2\pm\sqrt{L^2/4}}{2} \begin{cases} x=L \\ x=L/2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow V(L/2)=0$$

دیاگرام خمش از درجه ۳ می‌باشد، از ابتدا تا وسط تیر که برش مثبت است لنگر صعودی است و از وسط تا انتها نزولی

از ابتدا تا نقطه D که برش نزولی است خم منحنی لنگر رو به پایین و از نقطه D تا انتهای تیر که برش صعودی است خم منحنی لنگر رو به بالا می‌باشد، نقطه D نقطه عطف منحنی است

$$M(0)=-\frac{w_0L^2}{18} \;,\quad M(L/2)=\frac{w_0L^2}{72} \quad M(L)=0$$

مثال: ممان اینرسی شکل زیر را با انتگرال گیری نسبت به محورهای x و y بدست آورید



$$x=a\,,\ y=b \Rightarrow b=ka^3$$

$$\Rightarrow k=b/a^3 \Rightarrow y=b/a^3\,x^3$$

$$I_x=\int y^2\,dA$$

برای تمام نقاط المان y مقداری ثابت است

$$dA=dy\times x \qquad y=b/a^3\,x^3 \Rightarrow x^3=\frac{a^3y}{b} \hookrightarrow x=a\sqrt[3]{y/b}$$

چون بر حسب dy انتگرال گیری انجام می‌شود باید تمام متغیرها نیز بر حسب y باشند

$$dA = a\sqrt[3]{y/b} \times dy \Rightarrow I_x = \int_0^b y^2 \times a\sqrt[3]{y/b}\,dy = \frac{a}{\sqrt[3]{b}}\int_0^b y^{7/3}\,dy$$

چون انتگرال بر حسب y است حدود انتگرال نیز بر حسب y تعیین می‌گردد

$$\Rightarrow I_x = \frac{a}{\sqrt[3]{b}}\left[\frac{y^{10/3}}{10/3}\right]_0^b = \frac{3a}{10\sqrt[3]{b}} \times b^{10/3} = \frac{3}{10}ab^3$$

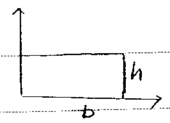
برای Iy می‌توان با همین المان انتگرال گیری کرد و یا از یک المان عمودی استفاده کرد. در اینجا از همین المان افقی استفاده می‌کنیم

در اینجا مقدار x در نقاط مختلف المان متغیر است پس

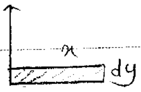
$$I_y = \int x^2 dA$$

بجای این روش ممان اینرسی المان را با توجه به ممان اینرسی مستطیل محاسبه و از آن انتگرال گیری می‌کنیم

$$I_y = \int_0^b dI_y$$



$$\Rightarrow I_y = \frac{b^3h}{3}$$



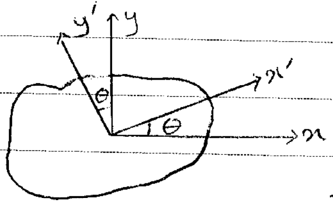
$$\Rightarrow dI_y = \frac{x^3dy}{3}$$

چون انتگرال گیری بر حسب y انجام می‌شود باید x را نیز بر حسب y بنویسیم

$$\Rightarrow dI_y = \frac{(a\sqrt[3]{y/b})^3dy}{3} = \frac{a^3y}{3b}dy \qquad I_y = \int_0^b \frac{a^3y}{3b}dy = \frac{a^3}{3b}\int_0^b y\,dy$$

$$= \frac{a^3}{3b}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{a^3b^2}{6b} = \frac{a^3b}{6}$$

محاسبه ممان اینرسی حول محورهای مورب:

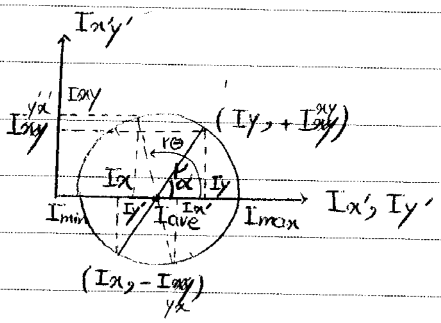


$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

روابط بالا را می توان بصورت یک دایره تحت نام دایره موهر ممان اینرسی نمایش داد



$$\begin{cases} I_{max} = I_{ave} + R \\ I_{min} = I_{ave} - R \end{cases}$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$an\,2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

برای محاسبه ممان های اینرسی در دستگاه مختصات x'y' قطر اولیه دایره را که ممان های اینرسی در دستگاه مختصات xy را مشخص می کند به اندازه 2θ می چرخانیم. جهت چرخش هم جهت با چرخشی است که محورهای x باید داشته باشد تا به محورهای x' و y' تبدیل شوند

ممان های اینرسی برای هر دستگاه مختصات با محورهای متعامد با یکی از قطرهای دایره موهر قابل نمایش است. در دایره موهر محور افقی نشان دهنده ممان های اینرسی حول دو محور اصلی و محور عمودی نشان دهنده ممان اینرسی حاصلضرب سطح مقطع اس

Tamasha

در حالتی که برای یک دستگاه مختصات حاصلضرب سطح مقطع صفر باشد محورهای آن دستگاه مختصات را محورهای اصلی می نامند. در این حالت ممان اینرسی حول یکی از دو محور max و حول محور دیگر min می شود

α : زاویه محورهای اصلی با محورهای xy

در محورهای اصلی : $I_{xy}=0$

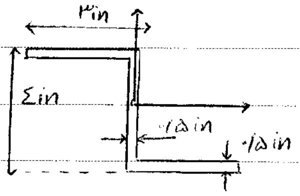
$I_x, I_y = I_{max}, I_{min}$

قطری از دایره موهر که منطبق بر محور افقی است نشان دهنده ممان های اینرسی در دستگاه مختصات اصلی است

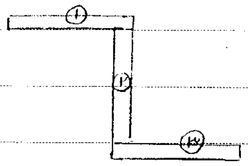
نکته: اگر قطر نشان دهنده ممان های اینرسی در دایره بصورت عمودی در آید مقدار حاصلضرب سطح max و برابر شعاع دایره و ممان های اینرسی با هم برابر و مساوی مختصات مرکز دایره می شود

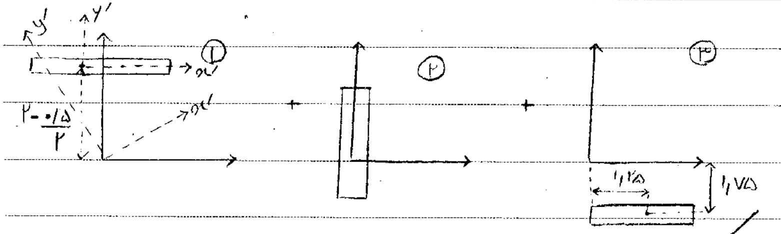
$(I_{xy})_{max}=R$ $\quad I_x=I_y=I_{ave}$

مثال: مقطعی در شکل نشان داده شده است. گشتاورهای لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_x=10.38\,in^4$ و $I_y=6.97\,in^4$، مطلوبست تعیین: الف) جهت گیری محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) گشتاورهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O؟



ابتدا مقدار $I_{xy}$ را محاسبه می کنیم:
برای این منظور شکل را به ۳ مستطیل تقسیم می کنیم





$I_{xy} = I_{x'y'} + A\cdot\bar{x}\bar{y}$

محورهای x' و y' را از مرکز سطح شکل عبور می‌دهیم

چون برای هر ۳ شکل محورهای x' و y' گذرنده از مراکز سطح سه شکل محورهای تقارن آن‌ها نیز هستند مقدار $I_{x'y'}$ برای هر سه شکل صفر است

$I_{xy_1} = 0 + (3\times0.5)\times(-1.25\times1.75) = -3.28\ in^4$

$I_{xy_2} = 0$

$I_{xy_3} = 0 + (3\times0.5)\times(1.25\times-1.75) = -3.28$

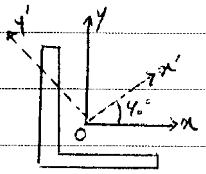
$I_{xy} = -3.28 + 0 - 3.28 = -6.56\ in^4$

$\tan2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{-2\times6.56}{10.38-6.97} = 3.85 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 75.4 \\ 2\alpha = 255.4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 37.7 \\ \alpha = 127.7 \end{cases}$

$I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_x}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = \frac{10.38+6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38-6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} I_{max} = 15.45 \\ I_{min} = 1.897 \end{cases} in^4$

مثال: مقطعی مطابق شکل مفروض است لنگرها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x و y عبارتند از: $I_x = 7.24\times10^6\ mm^4$ و $I_y = 2.61\times10^6\ mm^4$ و $I_{xy} = -2.54\times10^6$ با استفاده از دایره موهر مطلوبست تعیین: الف) محورهای اصلی مقطع حول نقطه O ب) لنگرهای لختی اصلی مقطع حول نقطه O ج) لنگرها و حاصلضرب لختی این مقطع نسبت به محورهای x' و y' که با محورهای x و y زاویه ۶۰° می‌سازند



Tamasha

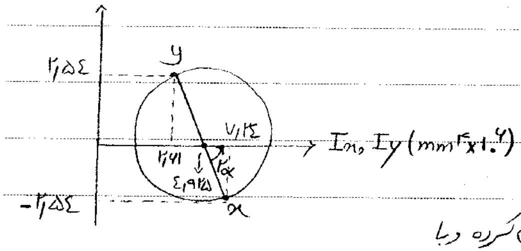
مختصات مرکز دایره:

$$I_{ave}=\frac{I_x+I_y}{۲}=۱۰^۶\times\frac{۷٫۲۴+۲٫۶۱}{۲}=۴٫۹۲۵\times۱۰^۶\ mm^۴$$

$$R=\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{۲}\right)^۲+I_{xy}^۲}=۱۰^۶\sqrt{\left(\frac{۷٫۲۴-۲٫۶۱}{۲}\right)^۲+(-۲٫۵۴)^۲}=۳٫۴۳۷\times۱۰^۶\ mm^۴$$

$$x\left(I_x,I_{xy}\right)=x\left(۷٫۲۴\ ,\ -۲٫۵۴\right)\times۱۰^۶$$

$$y\left(I_y,-I_{xy}\right)=y\left(۲٫۶۱\ ,\ ۲٫۵۴\right)\times۱۰^۶$$



روی دایره دو نقطه با مختصات زیر را مشخص کرده و با اتصال آنها به هم قطر متناظر در دایره را رسم می‌کنیم

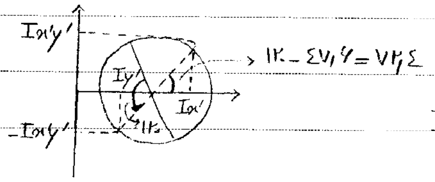
$$\tan ۲\alpha=\frac{۲٫۵۴}{(۷٫۲۴-۲٫۶۱)/۲}=۱٫۰۹۷$$

$$\Rightarrow ۲\alpha=۴۷٫۶\ \Rightarrow\ \alpha=۲۳٫۸^\circ$$

$$I_{max}=I_{ave}+R=(۴٫۹۲۵+۳٫۴۳۷)\times۱۰^۶=۸٫۳۶\times۱۰^۶\ mm^۴$$

$$I_{min}=I_{ave}-R=(۴٫۹۲۵-۳٫۴۳۷)\times۱۰^۶=۱٫۴۹\times۱۰^۶\ mm^۴$$

برای محاسبه ممان‌های اینرسی حول محورهای $x'$ و $y'$ قطر فعلی دایره را که مشخص کننده ممان‌های اینرسی در دستگاه مختصات $xy$ است به اندازه ۱۲۰° و پادساعتگرد می‌چرخانیم



$$I_{x'}=I_{ave}+R\cos ۷۲٫۴=(۴٫۹۲۵+۳٫۴۳۷\cos ۷۲٫۴)\times۱۰^۶$$
$$=۵٫۹۶\times۱۰^۶\ mm^۴$$

$$I_{y'}=I_{ave}-R\cos ۷۲٫۴=(۴٫۹۲۵-۳٫۴۳۷\cos ۷۲٫۴)\times۱۰^۶$$
$$=۳٫۸۹\times۱۰^۶\ mm^۴$$

$$I_{x'y'}=R\sin ۷۲٫۴=۳٫۴۳\times۱۰^۶\sin ۷۲٫۴=۳٫۲۸\times۱۰^۶\ mm^۴$$

Tamasha

کار مجازی :

کار یک نیرو

$\text{کار نیرو} = F.r$

$= |F| \times |r| \times \cos\alpha$

F: نیرو

r: جابه‌جایی

α: زاویه بردار نیرو و بردار جابه‌جایی

کار یک گشتاور:

$M \times \theta$

θ: میزان دوران

اگر جابه‌جایی و دوران هم جهت با نیرو یا گشتاور باشد کار مثبت است در غیر اینصورت کار منفی است

اصل کار مجازی:

جسمی را در نظر بگیرید که به آن نیروهای $F_1, F_2, \ldots, F_n$ و گشتاورهای $M_1, M_2, \ldots$ و $M_m$ وارد می‌شود به جسم تغییر شکلی کوچکی می‌دهیم به گونه‌ای که نقاط محل اثر نیروها دچار بردارهای جابه‌جایی $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ و نقاط محل اثر گشتاورها دچار چرخش‌های $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots \theta_m$ می‌شود حال اگر جسم دارای تعادل باشد باید مجموع کارهای انجام شده توسط نیروها و گشتاورها برابر صفر شود این مسئله را اصل کار مجازی می‌گوییم ۲

$$W = \vec{F_1}.\vec{\delta_1} + \vec{F_2}.\vec{\delta_2} + \ldots\ldots + \vec{F_n}\vec{\delta_n} + M_1\theta_1 + M_2\theta_2 + \ldots\ldots + M_m\theta_m = 0$$

W: کار مجازی

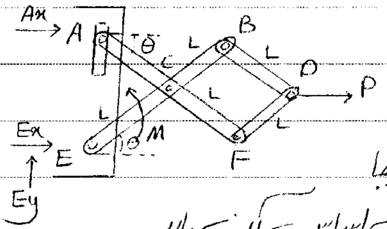
- استفاده از اصل کار مجازی جهت حل مسائل تعادل اجسام صلب:

در جسم دوران یا تغییر شکل کوچک به صورت مجازی ایجاد می‌کنیم و بر اساس آن در نقاط مختلف جسم که به جسم نیرو وارد می‌شود تغییر شکل‌ها را محاسبه می‌کنیم یعنی در محل اثر نیروها بردار جابه‌جایی و در محل اثر گشتاورها مقدار دوران را به دست می‌آوریم این محاسبات بر اساس تغییر شکل مجازی اولیه فرض شده در

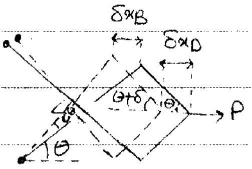
Tamasha

جسم می باشد و در محاسبات از خاصیت صلبیت جسم نیز استفاده می شود سپس اصل کار مجازی را می نویسیم و براساس آن مقادیر نیروهای مجهول را براساس اینکه جسم دارای تعادل باشد بدست می آوریم توجه کنید که چون نقطه اثر نیروها و لنگرهایی که محل اثر آنها دچار تغییر شکل می شود کار انجام می دهند و اکنش های تکیه گاهی که محل اثر آنها ثابت است کاری انجام نمی دهند و توسط این روش قابل محاسبه نیستند

مثال: با استفاده از روش کار مجازی اندازه کوپل M را که برای تعادل مجموعه زیر لازم است تعیین کنید.



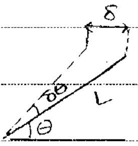
فرض می کنیم زاویه θ مربوط به راستای EB به اندازه δθ بزرگ شود سه واکنش تکیه گاهی با توجه به آنکه نقطه اثر آن ها ثابت است کاری انجام نمی دهند در اینجا تنها لنگر M و نیروی P هستند که می توانند کار انجام دهند که براساس آن باید مقدار دوران قطعه EB و جابه جایی افقی نقطه D محاسبه شود، دوران قطعه EB را δθ فرض کرده‌ایم براساس همین دوران باید جابه جایی افقی نقطه D را نیز محاسبه کنیم



در اثر بزرگ شدن زاویه θ نقاط C و B به سمت چپ حرکت کرده و اجباراً نقطه A به سمت بالا و F به سمت پایین و چپ حرکت می کند نقاط B و F از هم دور می شوند که در نتیجه باعث می شود نقطه D به سمت چپ حرکت کند

$\delta = L\sin\theta\,\delta\theta$

به شرط آنکه $\delta\theta$ کوچک باشد



جابه جایی افقی نقطه B: $\delta x_B = 2L\,\delta\theta\sin\theta$

جابه‌جایی نسبی D به B : $BD \times \sin\theta\,\delta\theta = L\,\delta\theta\sin\theta$

جابه‌جایی افقی D = $\delta x_D = 2L\,\delta\theta\sin\theta + L\sin\theta\,\delta\theta = 3L\sin\theta\,\delta\theta$

جابه‌جایی افقی نقطه D برابر است با مجموع جابه‌جایی افقی نقطه B و جابه‌جایی نسبی افقی نقطه D نسبت به B

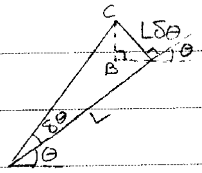
قطعه EB بطول 2L به اندازه $\delta\theta$ دوران کرده است که در نتیجه نقطه B به اندازه $\delta\theta$ به سمت چپ حرکت می‌کند

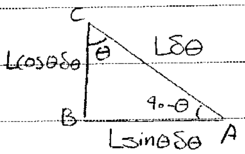
قطعه BD نیز به اندازه $\delta\theta$ دوران کرده است که در نتیجه نقطه D به اندازه $L\delta\theta$ به B نزدیک شده است

کار نیروی P با توجه به آنکه بردار نیرو و بردار جابه‌جایی خلاف جهت هم هستند منفی است اما کار گشتاور M با توجه به آنکه بردار گشتاور و جهت چرخش هم جهت است مثبت است

$$+M\delta\theta - P.(\underset{\sin\theta}{\underbrace{3L\delta\theta}}) = 0 \Rightarrow M\delta\theta = 3PL\delta\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow M = 3PL\sin\theta$$

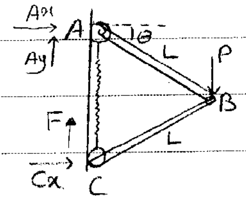




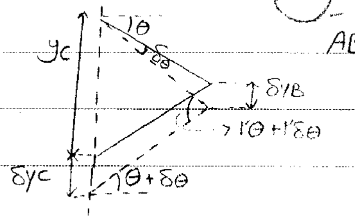
چون $\delta\theta$ در برابر $\theta$ کوچک است
از آن صرف نظر می‌کنیم

مثال: در شکل زیر مطلوبست محاسبه زاویه $\theta$ و نیروی فنر متناظر با حالت تعادل؟

فرض می‌کنیم میله AB به اندازه $\delta\theta$ و بصورت ساعتگرد دوران کند در نتیجه نقطه B به سمت پایین و چپ حرکت می‌کند و با توجه به آنکه طول میله BC ثابت است نقطه C نیز مجبور است به سمت پایین حرکت کند و زاویه $\theta$ مربوط به میله BC نیز بزرگ شود



چون مثلث ABC قبل و بعد از دوران متساوی الساقین است دوران قطعه BC نیز مساوی دوران قطعه AB است



$$y_C = 2L\sin\theta$$

$$\delta y_B = L\cos\theta\,\delta\theta$$

$$\delta y_C = 2L\cos\theta\,\delta\theta$$

جابجایی عمودی نقطه C برابر مجموع جابجایی عمودی نقطه B و جابجایی عمودی نسبی C به B است که هر دو نیز با هم برابرند

h : طول آزاد فنر
k : ثابت فنر
⇐ داده مسأله

$y_C - h = 2L\sin\theta - h$ افزایش طول فنر (قبل از دوران مجازی)

نیروی فنر قبل از دوران $F = k(2L\sin\theta - h)$

چون مقدار دوران مجازی کوچک فرض می شود می توان فرض کرد که تغییر شکل فنر و نیروی فنر قبل و بعد از این دوران با هم یکسان است

اصل کار مجازی : در اینجا فقط P و F کار انجام می دهند که در این بین کار نیروی F منفی است

$$P\delta y_B - F\delta y_C = 0 \Rightarrow P\delta y_B = F\delta y_C$$

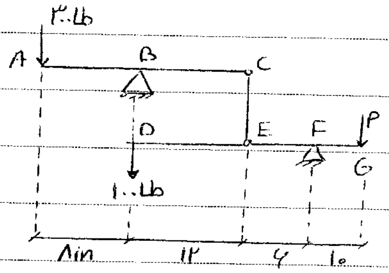
$$PL\cos\theta\,\delta\theta = k(2L\sin\theta - h)\,2L\cos\theta\,\delta\theta$$

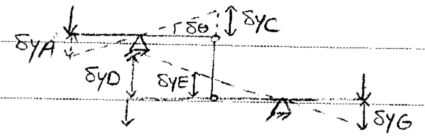
$$P = 2k(2L\sin\theta - h) \rightarrow P = 4kL\sin\theta - 2kh \qquad \sin\theta = \frac{P+2kh}{4kL}$$

$$\rightarrow \theta = \text{Arcsin}\left(\frac{P+2kh}{4kL}\right)$$

$$\delta y_B = \tfrac{1}{2}\delta y_C \rightarrow P\delta y_C/2 = F\delta y_C \Rightarrow F = P/2$$

مثال: مطلوبست تعیین نیروی عمودی P که مجموعه در تعادل باشد.
فرض می‌شود که میله ABC به اندازه $\delta\theta$ و
پادساعتگرد دوران می‌کند


۳۰Lb
A
B
C
D
E
F
P
G
۱۰۰Lb
۸in
۱۲
۴
۱۰


$\delta y_A$
۴
$r\delta\theta$
$\delta y_C$
$\delta y_D$
$\delta y_E$
$\delta y_G$

$\delta y_A = \delta\theta \times ۸$

$\delta y_C = \delta y_E = ۱۲\delta\theta$

تشابه: $\frac{\delta y_E}{\delta y_D} = \frac{۴}{۱۸} \Rightarrow \delta y_D = ۳\delta y_E \qquad \delta y_D = ۳۶\delta\theta$

$\frac{\delta y_E}{\delta y_G} = \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \delta y_G = {}^{۱۰}\!/_{۴}\, \delta y_E \qquad \delta y_G = {}^{۱۰}\!/_{۱۴} \times ۱۲\delta\theta = ۲۰\delta\theta$

کار نیروهای ۳۰ و P مثبت و ۱۰۰ منفی است

اصل کار مجازی: $۳۰ \times ۸\delta\theta - ۱۰۰ \times ۳۶\delta\theta + P \times ۲۰\delta\theta = ۰$

$۲۰P\delta\theta = ۱۲۰۰\delta\theta \rightarrow P = ۶۰Lb$

شهلا نعمانی