استاتیک

※ یک عمر بستی موفقیتش را تضمین می‌کند
چون این توانایی را دارد
که تا رسیدن به هدف به چیزی بچسبد ※

* اگر صخره در مسیر رود نبود رود هیچ آوازی از خود سر نمی‌داد *

استاتیک و مقاومت مصالح

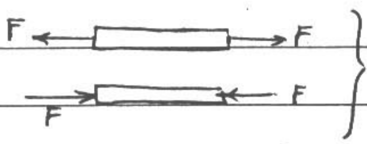
جلسه اول:

استاتیک:

اولویت ها: 1. بحث انرژی
2. اعضاء دو نیرویی
3. اعضاء سه نیرویی
4. خرپا ها و قاب ها
مسائل عمومی
اصطکاک لغزشی و غلتشی
سطوح شیبدار
- کابل ها
- تیرهای خمیده

مقدمه:

در استاتیک فرض بر صلبیت جسم است.



یکسان در استاتیک

برای حل مسائل مقاومت مصالح در فضای دو بعدی نیاز به:

1 _ معادلات تعادل ← رابطه نیروهای خارجی بر روی دیاگرام آزاد جسم
2 _ معادلات سازگاری ← رابطه نیروهای خارجی با تغییر مکان

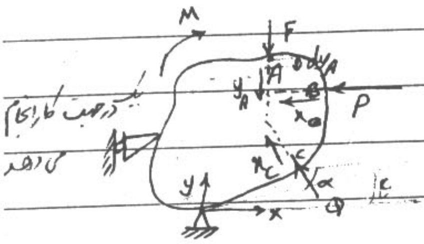
$\delta = \frac{Pl}{AE}$

در استاتیک اجازه نداریم از معادلات سازگاری استفاده کنیم
به همین دلیل است که در استاتیک فصل انرژی آمده که در واقع این دو سری معادلات را در بر می گیرد.

هر مسئله نامعین در استاتیک را باید از روش انرژی برویم.

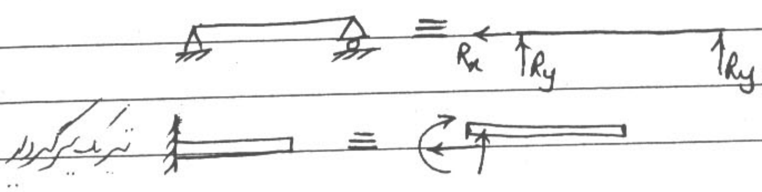
* در امتحان مسائل نامعین ایستا یا نامعین و مسائلی که دارای فنر است به کمک روش انرژی حل می‌شود.

بحث انرژی :



جسم صلب است.

این تکیه‌گاه کاری انجام نمی‌دهد چون نه در جهت x و نه در جهت y حرکت می‌کند.



هر نیرویی در راستای خودش تغییر مکانی دارد به نام y_A یا x_B یا ...

رابطه تعادل

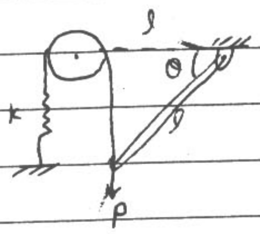
$$\boxed{F \cdot dy_A + P \cdot dx_B + Q\, dx_c + M\, d\theta = 0}$$

رابطه تعادل رابطه نیروهای خارجی با تغییر مکان سیستم است.

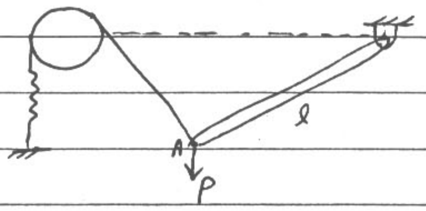
* این تغییر مکانها در راستای خودشان است.

در استاتیک ما دو دسته مسائل داریم :

مسئله اول : حالت اولیه و ثانویه در دسترس است.



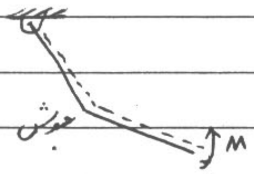
حالت اولیه ← در $\theta = 0$ فنر آزاد است



حالت ثانویه

مسائل نوع 4 : حالت ثانویه در دسترس نیست.

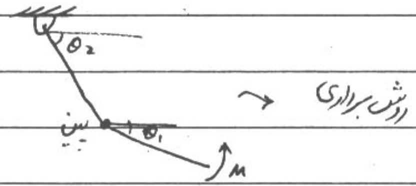
در اینصورت ما خودمان به سیستم یک تلنگر می‌زنیم

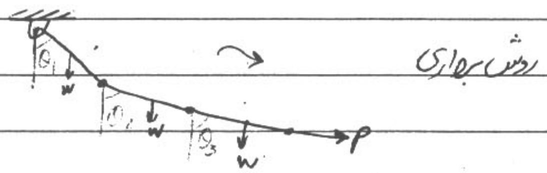


در این حالت دو حالت را در نظر می‌گیریم.

الف) روش برداری (تعمیم برداری)

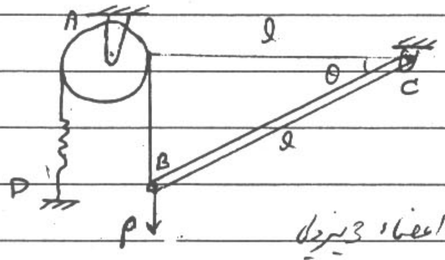
ب) خودمان به سیستم یک چرخش جزئی می‌دهیم





مسائل :

مثال) زاویه θ تعادل کدام است ؟ در $\theta = 0$ فنر آزاد است.



در اینجا حالت اولیه و ثانویه را داریم.

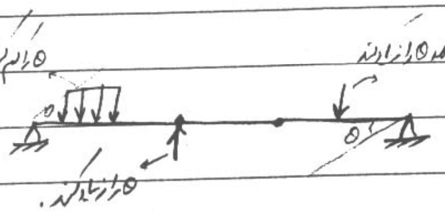
در اینجا چون فنر است حتماً از روش انرژی می‌رویم.

برای حل مسائل استاتیک اول نوع مسائل را (انرژی، اعضاء دو نیرویی، اعضاء 3 نیرویی) را مشخص کنید و آنها را حل کنید.

باید از روش انرژی استفاده کنیم. در مسائل ابتدا باید دید کدام آزاد را بکشیم ولی در اینجا نکشیدیم

چون نیروی عمودی است پس dy در نظر میگیریم نه dx
اگر در استاتیک دو تا نیرو داشتیم یکی حتماً مثبت و دیگری منفی است.
نیروی P می خواهد θ را زیاد کند و فنر می خواهد جابجایی را کم کند.

* در مسائل نوع A علامت گذاری به همین شکل است. مثلاً:



$$P\,dy_B - F\,dy_D = 0$$

$y_B = l\sin\theta \qquad y_D = AB = l\sin\theta$

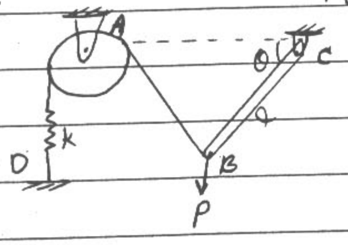
$dy_B = l\cos\theta\, d\theta \qquad dy_D = l\cos\theta\, d\theta$

$$P\,dy_B - k y_D \cdot dy_D = 0 \rightarrow Pl\cos\theta\, d\theta - kl\sin\theta \cdot l\cos\theta\, d\theta$$

$\rightarrow$ پاسخ $\boxed{\sin\theta = \frac{P}{kl}}$

(حالت اولیه و ثانویه مشخص است)
مثال) θ تعادل کدام است؟ در $\theta = 0$ فنر آزاد است.

چون فنر داریم از روش انرژی

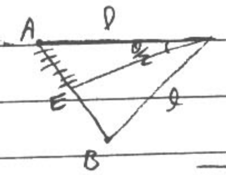


فنر F

$P\,dy_B - k y_D\, dy_D = 0$

$y_B = l\sin\theta \qquad dy_B = l\cos\theta\, d\theta$

$y_D = AB = ?$

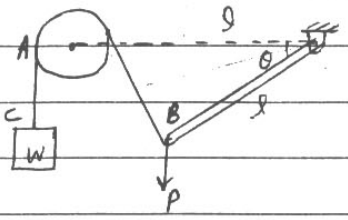


$y_D = 2AE = 2l\sin\theta/2$ $\qquad$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$dy_D = 2 \times \frac{1}{2} l \cos\theta/2\, d\theta$

پاسخ: $\boxed{\tan\theta = \frac{P}{kl}}$

مسئله: θ تعادل برحسب p، ℓ، w کدام است؟



راهنمایی: $p\,dy_B - w\,dy_c = 0$

جواب: $\cos^2\frac{\theta}{2} - \frac{w}{2p}\cos\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$y_B = \ell\sin\theta \longrightarrow dy_B = \ell\cos\theta . d\theta$

$y_c = 2\ell\sin\theta/2 \longrightarrow dy_c = \ell\cos\theta/2\, d\theta$ $\qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

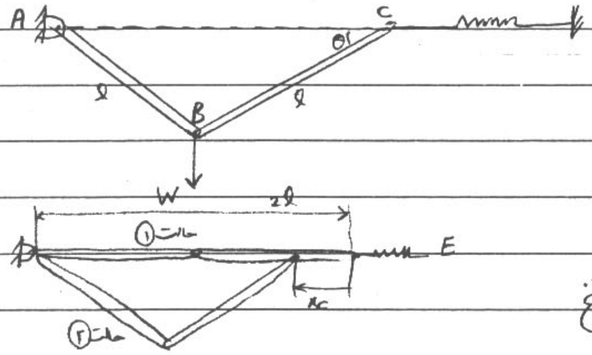
$p\,\cancel{\ell}\cos\theta\,\cancel{d\theta} - w\,\cancel{\ell}\cos\theta/2\,\cancel{d\theta} = 0$ $\qquad \cos\theta = 2\cos^2\theta/2 - 1$

$p(2\cos^2\theta/2 - 1) - w\cos\theta/2 = 0$

$\cos^2\theta/2 - \frac{w}{2p}\cos\theta/2 - \frac{1}{2} = 0$

مسئله: θ تعادل کدام است؟

وقتی AB و BC در حالت افقی است، فنر آزاد است. $\qquad$ فنر به روش انرژی $\qquad$ حالت اولیه و ثانویه معلوم (نوع A)



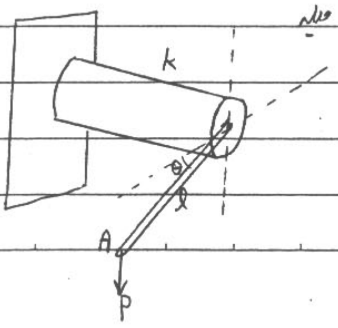
$F_{\text{فنر}}$

$W\,dy_B - \boxed{Kx_c}\,.\,dx_c = 0$

$y_B = \ell\sin\theta \qquad dy_B = \ell\cos\theta\,d\theta$

$x_c = 2\ell - 2\ell\cos\theta \qquad dx_c = 2\ell\sin\theta\,d\theta$

پاسخ: $(1-\cos\theta)\tan\theta = W/4k\ell$



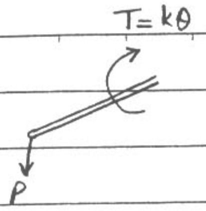
مسئله: برای تعادل

۱) $\cos\theta = \frac{k}{p\ell}\theta$

۲) $\sin\theta = \frac{k}{p\ell}\theta$

۳) $\tan\theta = \frac{k}{p\ell}\theta$

٤



$$P\,dy_A - T\,d\theta = 0$$

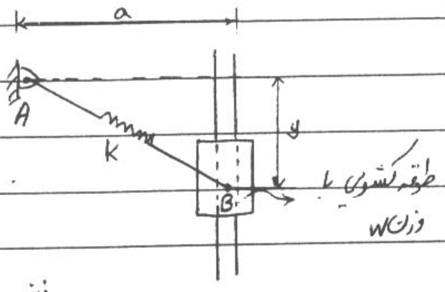
در این مسئله ما یک فنر پیچشی داریم.

$$y_A = l\sin\theta$$

$$dy_A = l\cos\theta\, d\theta$$

$$T = k\theta \longrightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{k}{pl}\theta}$$

مثال) y تعادل چقدر است؟



در روش انرژی تجزیه نیروها غلط است.

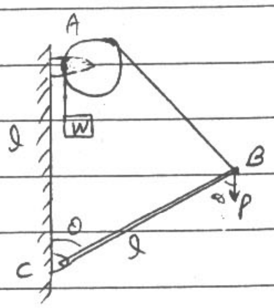
نیروی فنر تجزیه نکن! تغییر مکان در راستای نیروی فنر است.

$$w\,dy - k\overset{\text{فنر}}{s}\,ds = 0$$

$$s = \sqrt{a^2+y^2} - a \qquad ds = \frac{1}{2} \times 2y(a^2+y^2)^{-1/2}\,dy$$

پاسخ: $y\left[1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}\right]^{-1} = w/k$

* مثال) θ تعادل کدام است؟ مهم !!!

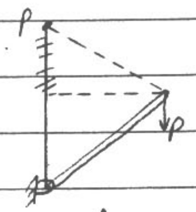


جواب: $\sin\theta/2 = \dfrac{w}{2p}$

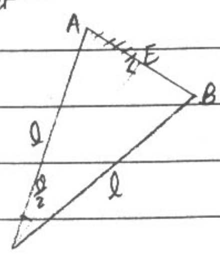
$$p\,dy_B - w\,dy_C = 0$$

$$y_B = l - l\cos\theta$$

$$dy_B = l\sin\theta\, d\theta$$



اگر نیروی P افقی بود فاصله $l\sin\theta$ می‌شد.



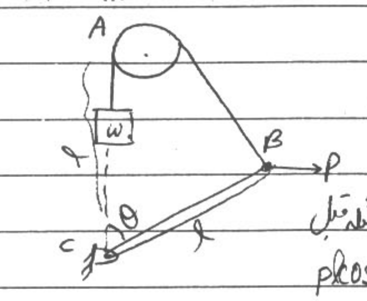
$$y_C = AB - 2AE$$

$$y_C = 2\overset{l}{}\sin\theta/2 \qquad * \sin\theta = 2\sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2$$

$$dy_C = 2\overset{l}{}\times\frac{1}{2}\cos\theta/2\, d\theta$$

پاسخ: $\sin\theta/2 = w/2p$

مثال) مثال قبل حل شود مشروط بر آنکه نیروی P به طور افقی اعمال گردد.



$P\,dx_B - w\,dy_C = 0$

$x_B = l\sin\theta \rightarrow dx_B = l\cos\theta\,d\theta$

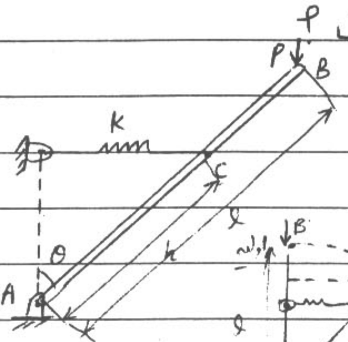
ثابت به مسئله قبل $y_A = AB = 2l\sin\theta/2 \qquad dy_A = l\cos\theta/2\,d\theta$

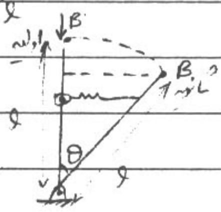
$Pl\cos\theta\,d\theta - wl\cos\theta/2 \cdot d\theta = 0$

$P\cos\theta - w\cos\theta/2 = 0 \rightarrow P(2\cos^2\theta/2 - 1) - w\cos\theta/2 = 0$

* $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ *

مثال) میله بدون وزن است و در $\theta = 0$ فنر آزاد است. θ کدام است؟





$P\,dy_B - \overbrace{kx_C}^{F}\,dx_C = 0$ «مهم»

$y_B = l - l\cos\theta$

$dy_B = +l\sin\theta\,d\theta$

$x_C = h\sin\theta \qquad dx_C = h\cos\theta\,d\theta$

$\boxed{\cos\theta = \frac{Pl}{kh^2}}$

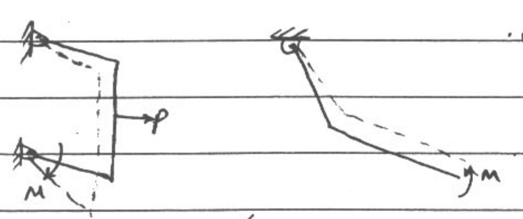
فنر ← روش انرژی

حالت اولیه ثانویه معلوم ← مسئله نوع A

مسائل نوع B:

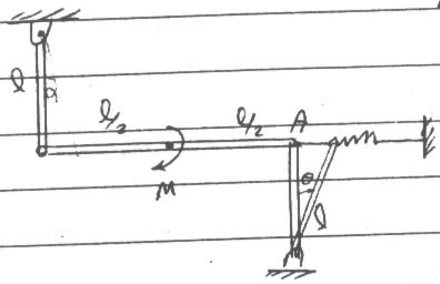
حالت اولیه یا ثانویه در دسترس نمی‌باشد. که شامل دو نوع مسئله است:

الف) مسئله‌ای که با ایجاد جنبش جزئی به راحتی قابل حل است.



ب) مسائلی است که با ایجاد جنبش به راحتی نمی‌توان تغییر مکان سر نیرو یا سیستم را دنبال کرد. لذا روش برداری (شبه برداری) حل می‌شود.

مثال) کدام θ تعادل جسم است؟ فنر ← روش انرژی



$\theta = \frac{M}{kl^2}$ (۱

در این شکل چون θ به صورت مشخص داده شده پس به اندازه θ حرکت می‌دهیم. ولی اگر θ به صورت مشخص داده شده بود به اندازه $d\theta$ حرکت می‌دهیم.

$F_{فنر}\, dx_A - M d\theta = 0 \longrightarrow kl\theta \cdot l d\theta - M d\theta = 0$

$x_A = l\theta \qquad dx_A = l d\theta \qquad \theta = \frac{M}{kl^2}$

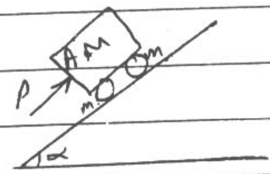
مسائل ۱۰ـ۱۵ سال اخیر و مسائل کتاب را حتماً با روش انرژی حل کنید.

مثال) تعداد مکان چرخ نصف تغییر مکان ارابه است. کدام صحیح است؟

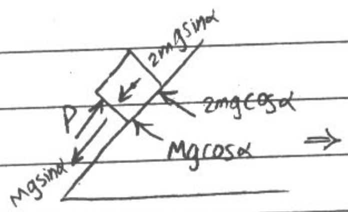
(۱ $P = (M+m)\, g\sin\alpha$

(۲ $P = (M+2m)\, g\sin\alpha$

(۳ $P = (M+m)\, g\tan\alpha$



نیروها چرخ و ارابه را جدا می‌کنیم.



⇒ در راستای عمود بر سطح شیبدار کار انجام نمی‌گیرد.

فرض: ارابه به اندازه dx_A جابجا شده، لذا چرخها $\frac{dx_A}{2}$ جابجا شده‌اند.

$P \cdot dx_A - Mg\sin\alpha\, dx_A - 2mg\sin\alpha \frac{dx_A}{2} = 0$

$\boxed{P = (M+m)\, g\sin\alpha}$

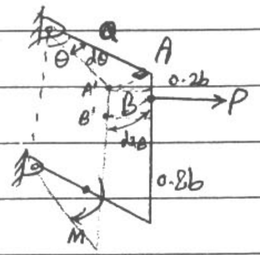
مهندسی مکانیک 70

مثال) θ تعادل کدام است؟

در اینجا حالت ثانویه را ایجاد می‌کنیم.

چون نیروی P افقی است dx_B را می‌خواهیم

در اینجا چون θ در مسئله هست به اندازه $d\theta$ حرکت می‌دهیم.



جواب: $\cos\theta = \frac{M}{Pa}$

$$P\,dx_B - M\,d\theta = 0$$

$$AA' = a\,d\theta$$

$$AA' = BB' = a\,d\theta$$

$$dx_B = BB'\cos\theta = a\,d\theta\cos\theta$$

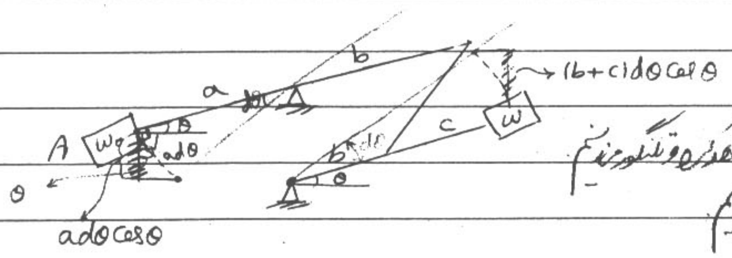
$$Pa\cos\theta\,d\theta = M\,d\theta \longrightarrow \boxed{\cos\theta = M/Pa}$$

همیشه تغییر مکان در راستای نیرو است.

* هرگاه نسبت نقطه تلنگور می‌زنیم از جایی که جدا می‌شود از نقطه آن زاویه را 90° در نظر می‌گیریم *

مثال) کدام رابطه تعادل صحیح است؟ (اتصالات جوش است)

جواب: $w_0 = \frac{b+c}{a}\,w$



وقتی جوش است کل سیستم یکپارچه حرکت خواهد کرد و تلنگور می‌زنیم ولی وقتی پین بود باید از روش برداری برویم

$$w_0\,dy_{w_0} - w\,dy_w = 0$$

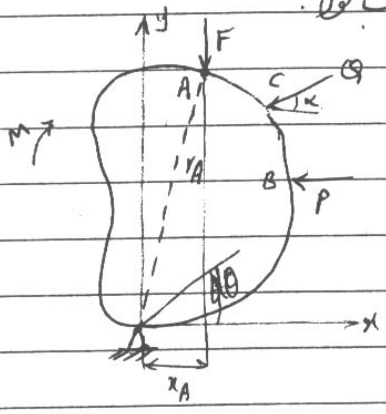
$$w_0\,a\cos\theta\,d\theta - w(b+c)\cos\theta\,d\theta$$

$$\boxed{w_0 = \frac{b+c}{a}\,w}$$

روش برداری:

در مسائلی که نمی‌توانیم حالت ثانویه را با یک تلنگور ایجاد کنیم، از روش برداری استفاده می‌کنیم (یا تعداد پین‌ها زیاد است یا پیستون‌ها)

1) حتماً محور مختصات xy در نقطه ای که کار انجام نمی‌گیرد انتخاب شود.



(تکیه‌گاه مفصلی را می‌توان محور مختصات در نظر گرفت
چون در کل جهت حرکت نمی‌کند و کار انجام نمی‌دهد)

* نیروی Q را تجزیه نکن!

** علامت نیروها را با توجه به جهت محورهای مختصات تعیین می‌کنیم.

2) نیروها را به صورت ماتریس و در ردیفی می‌نویسیم یعنی مثلاً:

* یکی را به صورت ماتریس و دیگری را به صورت ردیفی می‌نویسیم تا قانون ضرب رعایت شود.

$$[F] = [F_x , F_y] = [0 , -F]$$

$$[P] = [P_x , P_y] = [-P , 0] \quad \text{یا}$$

3) بردار تغییر مکان ستونی نوشته شود.

$$\{r_A\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}$$

در روش برداری برای M بردار تعامل نمی‌شود به همان شکل $Md\theta$ می‌نویسیم.

$$\{r_B\} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}$$

$$\{r_C\} = \begin{Bmatrix} x_C \\ y_C \end{Bmatrix}$$

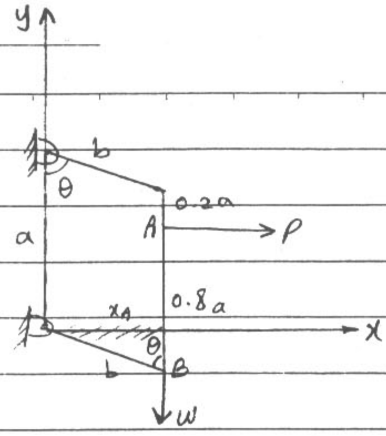
رابطهٔ انرژی:
$$\boxed{[F]\{dr_A\} + [Q]\{dr_C\} + [P][dr_B] + Md\theta = 0}$$

همیشه مثبت چون قبلاً
علامت‌ها را منظور کردیم

$$\{r_A\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix}$$

$$\{dr_A\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_A}{\partial \theta} d\theta \\[2mm] \dfrac{\partial y_A}{\partial \theta} d\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial x_A}{\partial \theta} \\[2mm] \dfrac{\partial y_A}{\partial \theta} \end{Bmatrix} d\theta$$

مثال) θ تعادل کدام است؟



جواب: $\tan\theta = \frac{W}{P}$

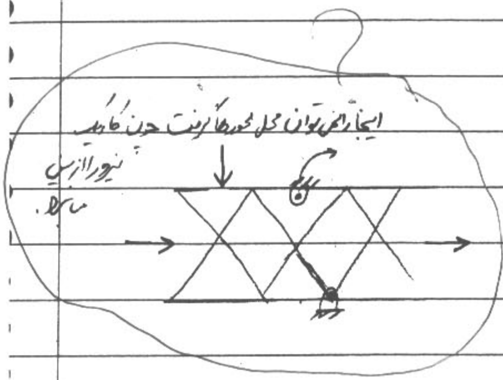
$$[P]\{dr_A\} + [W]\{dr_B\} = 0$$

$$[P] = [+P, 0]$$

$$[W] = [0, -W]$$

$$\{r_A\} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b\sin\theta \\ 0.8a - b\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{dr_A\} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ +b\sin\theta \end{Bmatrix} d\theta$$



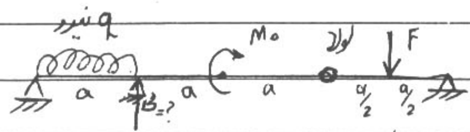
$$\{r_B\} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b\sin\theta \\ -b\cos\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{dr_B\} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ +b\sin\theta \end{Bmatrix} d\theta$$

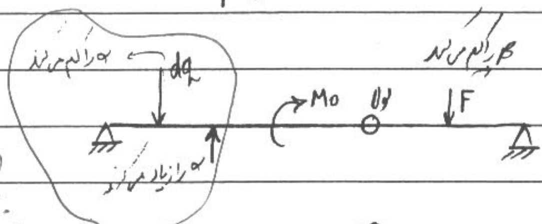
$$\Rightarrow \quad Pb\cos\alpha - Wb\sin\alpha = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{P}{W}$$

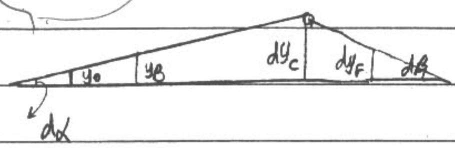
مثال: مقدار نیروی B چقدر است؟



در اینجا حالت ثانویه را ندارم.
از روش مجازی هم نمی‌توان رفت چون کار نیروها را صفر
می‌کند.
پس یک تکنیک به سیستم می‌دهیم



حل:



$$aq\, dy_{aq} - B dy_B + M_0\, d\alpha + F dy_F = 0$$

$$dy_{aq} = \frac{a}{2} d\alpha \qquad dy_B = a\, d\alpha \qquad dy_F = \frac{a}{2} d\beta$$

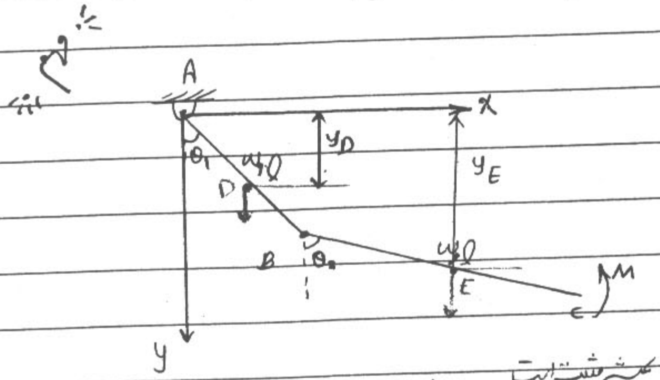
از طرفی $d\alpha$ و $d\beta$ با هم رابطه دارند.

$$dy_c = a\,d\beta = 3a\,d\alpha$$

$$\boxed{d\beta = 3\,d\alpha}$$

در این مسئله α و β با هم رابطه داشتند ولی در مسئله بعدی اینطور نیست.

مثال) θ_1 و θ_2 تعادل کدام است؟ وزن میله‌ها W و طول l می‌باشد.



در این مسئله هیچ رابطه‌ای بین θ_1 و θ_2 نداریم. باید جوشان یکی را صفر کنیم تا دیگری بدست آید.

* M در جهت عقربه‌های ساعت مثبت است و $d\theta_2$ هم هم جهت با M علامت گذاری می‌شود.

M خلاف جهت عقربه‌های ساعت و $d\theta_2$ هم خلاف جهت

$$w\,dy_D + w\,dy_E + \overbrace{M\,d\theta_2}^{\text{کلیه مثبت است}} = 0$$

در اینجا بایستی نیروها و مختصات حتماً علامت گذاری شود یعنی:

$$(+w)(+dy_D) + (+w)(+dy_E) + (-M)(-d\theta_2) = 0$$

$$y_D = \tfrac{l}{2}\cos\theta_1$$

$$dy_D = -\tfrac{1}{2}l\sin\theta_1\,d\theta_1$$

$$y_E = l\cos\theta_1 + \tfrac{l}{2}\cos\theta_2 \qquad dy_E = -l\sin\theta_1\,d\theta_1 - \tfrac{1}{2}l\sin\theta_2\,d\theta_2$$

یا مثال) کدام صحیح است؟

$$w\left(-\tfrac{1}{2}l\sin\theta_1\,d\theta_1\right) + w\left(-l\sin\theta_1\,d\theta_1 - \tfrac{1}{2}l\sin\theta_2\,d\theta_2\right) + M\,d\theta_2 = 0$$

فرض $d\theta_1 = 0$

1) $\sin\theta_2 = \dfrac{2M}{wl}$

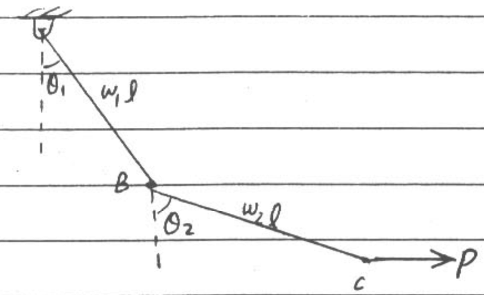
2) $\sin\theta_2 = \dfrac{M}{wl}$

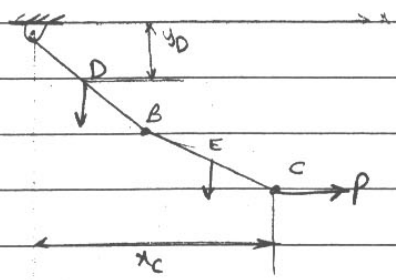
3) $\sin\theta_2 = \dfrac{3M}{wl}$

$$\boxed{\sin\theta_2 = 2M/wl} \qquad \boxed{\sin\theta_1 = 0}$$

در تمام مسائلی که با دو تا متغیر سروکار داریم و این متغیرها با هم رابطه ندارند باید فرض $d\theta_1 = 0$ یا $d\theta_2 = 0$ را حتماً در نظر بگیریم. (در انتهای مسئله)

مثال) θ_1 یا θ_2 تعادل چقدر است؟





$$w\,dy_D + w\,dy_E + P\,dx_C = 0$$

$y_D = \frac{l}{2}\cos\theta_1 \rightarrow dy_D$ محاسبه میشود

$y_E = (l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2) \rightarrow dy_E$ محاسبه

$$x_C = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2$$

$$dx_C = l\cos\theta_1\, d\theta_1 + l\cos\theta_2\, d\theta_2$$

با قراردادن در رابطه قبلی

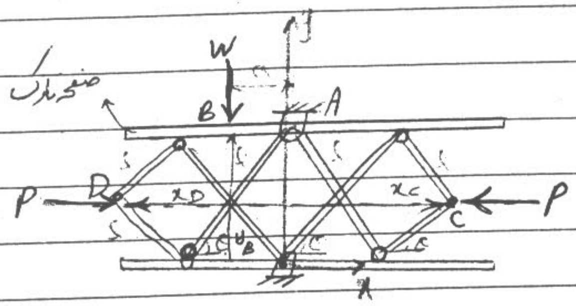
$$-w_1\left(\frac{l}{2}\sin\theta_1\, d\theta_1\right) - w_2\left(l\sin\theta_1\, d\theta_1 - \frac{1}{2}l\sin\theta_2\, d\theta_2\right) + P\left(l\cos\theta_1\, d\theta_1 + l\cos\theta_2\, d\theta_2\right) = 0$$

چون بین $d\theta_1$ و $d\theta_2$ رابطه موجود نیست لذا:

۱) اگر $d\theta_2 = 0$ باشد ← $\tan\theta_1 = \frac{2P}{3W}$

2) اگر $d\theta_1 = 0$ باشد ← $\tan\theta_2 = \frac{2P}{W}$

مثال) θ تعادل کدام است؟



۱- انتخاب محور xy : xy در نقطه A انتخاب بشود چون کار نیروی W را از بین می‌برد.

۲- رابطه کلی انرژی را با حفظ علامت می‌نویسیم.

$$(-P)(dx_C)+(+P)(-dx_D)+(-W)(+dy_B)=0$$

$$-P\,dx_C-P\,dx_D-W\,dy_B=0$$

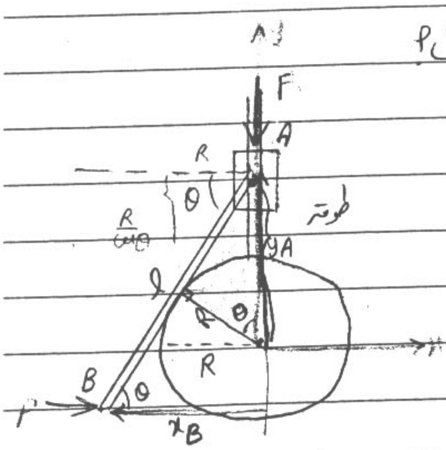
$$P\,dx_C+P\,dx_D+W\,dy_B=0$$

$$x_C=x_D=3l\cos\theta \qquad dx_C=dx_D=-3l\sin\theta\,d\theta$$

$$y_B=2l\sin\theta \qquad dy_B=2l\cos\theta\,d\theta$$

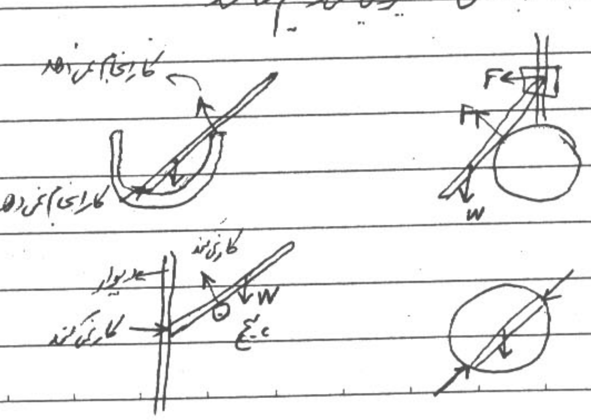
$$\boxed{\tan\theta=\frac{W}{3P}}$$

مثال) اصطکاک صفر است. میله بدون وزن، θ تعادل کدام است؟

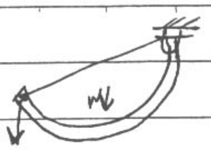


جواب: $\cos^2\theta=\dfrac{FR}{Pl}$

تذکر: بعداً بر مسائل 3 نیروی می‌رسیم مانند



یعنی عملاً از انرژی نمی‌توان رفت چون فعال‌اند نیرو فعال است.



رینگی تحت وزن خودش؟

چون دو تا نیرو فعال است می توان از انرژی یا تعادل ← استفاده کرد.

در مسائل سه نیرویی که یک نیرو فعال است نمی توان از انرژی حل کرد و از تعادل حل می شود

در این مسئله چون دو تا نیرو فعال است لذا می توان از انرژی یا تعادل مسئله را حل کرد.

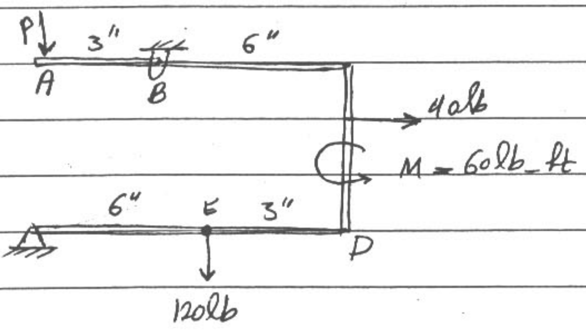
$$(-F)(+dy_A)+(+P)(-dx_B)=0$$

$$F dy_A + P dx_B = 0$$

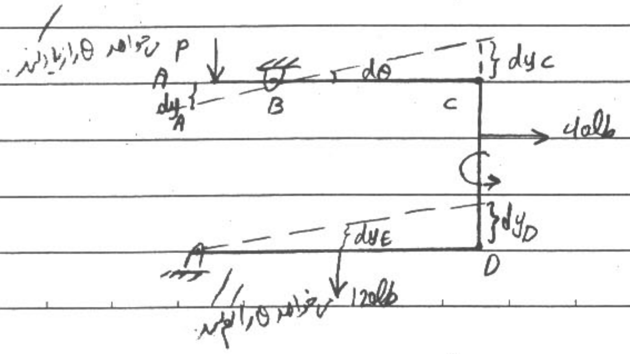
$$\cos\theta = R/y_A \qquad y_A = \frac{R}{\cos\theta} \qquad dy_A = \frac{R\sin\theta}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$x_B = l\cos\theta \qquad dx_B = -l\sin\theta\, d\theta \rightarrow \boxed{\cos^2\theta = \frac{FR}{Pl}}$$

مثال) نیروی P تعادل کدام است؟



مسئله از روش برداری حل نمی شود چون محورها در راستای کار صفر انجام می دهند لذا مسائل نوع L :

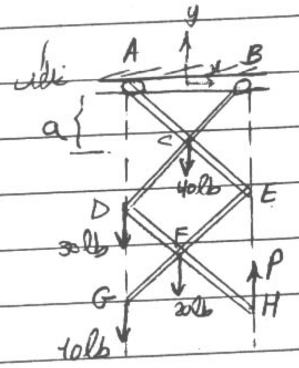


با زدن تلنگر میله CD به صورت قائم بالا می رود و بنابراین نیروی 40lb و گشتاور M دچار جابجایی نمی شوند پس در روش انرژی منظور نمی شود.

$$P\,dy_A - 120\,dy_E = 0$$
$$dy_A = 3d\theta$$
$$dy_C = 6d\theta$$
$$dy_D = dy_C = 6d\theta \qquad \frac{dy_E}{dy_D} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$dy_E = \frac{2}{3} \times 6\,d\theta \qquad dy_E = 4d\theta \longrightarrow P.3\,d\theta = 120 \times 4d\theta$$
$$\boxed{P = 160\,kN}$$

M و 40lb

مثال) P برای نگهداری سیستم کدام است؟



۱- انتخاب محور xy

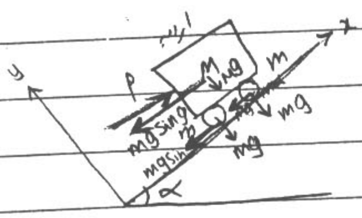
$$(-40)(-dy_C) + (-30)(-dy_D) + (-10)(-dy_G) +$$
$$(-20)(-dy_F) + (P)(-dy_H) = 0$$

فرض کنیم فاصله a است.

$$y_C = a \longrightarrow dy_C = da$$
$$y_D = 2a \longrightarrow dy_D = 2da$$
$$y_F = 3a \longrightarrow dy_F = 3da$$
$$y_G = 4a \longrightarrow dy_G = 4da \qquad \Longrightarrow \boxed{P = 50\,lb}$$

مثال)

$$P = ?$$



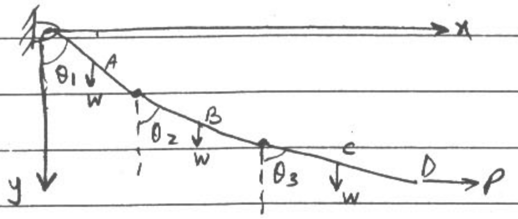
روش برداری:

رابطه $x_C = \frac{1}{2} x_A$ چرخ

$$P(+dx_A) - Mg\sin\alpha\,dx_A - 2mg\sin\alpha\left(\tfrac{1}{2}dx_A\right) = 0$$

$$P = Mg\sin\alpha + mg\sin\alpha = \boxed{(M+m)g\sin\alpha}$$

مثال) روش برداری : $\theta_1, \theta_2, \theta_3 = ?$



$$w(+dy_A) + w(+dy_B) + w(+dy_C) + P(dx_D) = 0$$

$$y_A = \frac{l}{2}\cos\theta_1 \qquad dy_A = -\frac{l}{2}\sin\theta_1 d\theta_1$$

$$y_B = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2 \longrightarrow dy_B = -l\sin\theta_1 d\theta_1 - \frac{l}{2}\sin\theta_2 d\theta_2$$

$$y_C = l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 + \frac{l}{2}\cos\theta_3 \longrightarrow dy_C = -l\sin\theta_1 d\theta_1 - l\sin\theta_2 d\theta_2 - \frac{l}{2}\sin\theta_3 d\theta_3$$

$$x_P = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2 + l\sin\theta_3 \longrightarrow dx_P = l(\cos\theta_1 d\theta_1 + \cos\theta_2 d\theta_2 + \cos\theta_3 d\theta_3)$$

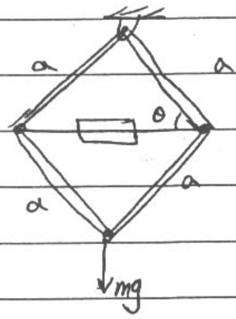
$$d\theta_2, d\theta_3 = 0 \longrightarrow \tan\theta_1 = \frac{2P}{5W}$$

$$d\theta_1, d\theta_3 = 0 \longrightarrow \tan\theta_2 = \frac{2P}{3W}$$

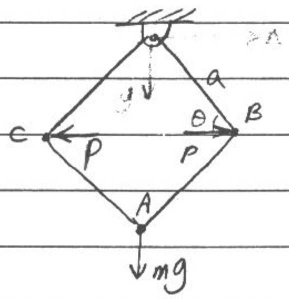
$$d\theta_1, d\theta_2 = 0 \longrightarrow \tan\theta_3 = \frac{2P}{W}$$

بررسی C

مثال) θ تعادل کدام است؟ و نیروی سیلندرها است.



جواب : $P = mg\cot\theta$



$$(mg)(dy_A) + (P \cdot dx_B) + (-P)(-dx_C) = 0$$

$$y_A = 2a\sin\theta \qquad x_B = x_C = a\cos\theta$$

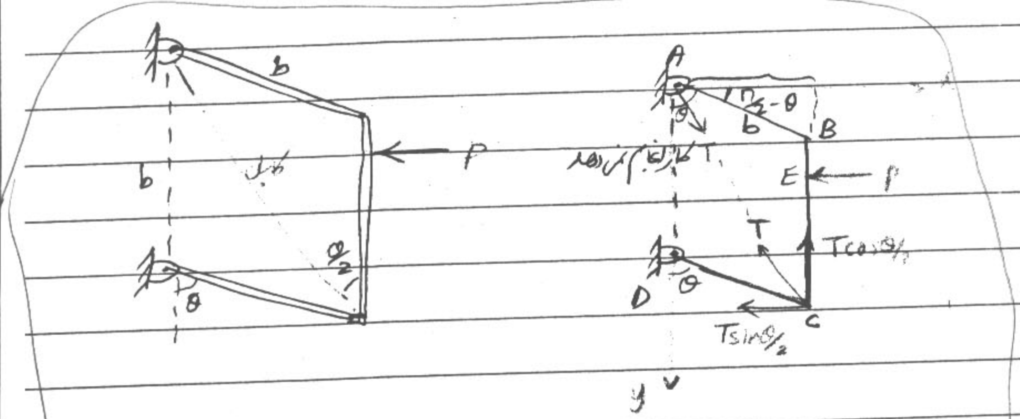
$$dy_A = 2a\cos\theta d\theta \qquad dx_B = dx_C = -a\sin\theta d\theta$$

$$\boxed{P = mg\cot\theta}$$

۱۰

مثال) مطلوبست نیروی کشش سیم افرمینی T را که توسط نیروی افقی P سیستم متوازی الاضلاع را در تعادل نگه داشته است.

روش برداری:



$$(-P)(+dx_E) + (-T\cos\theta/2)(dy_c) - (T\sin\theta/2)(dx_c) = 0$$

$x_E = b\sin\theta$ $\qquad$ $x_c = b\sin\theta$

$dx_E = b\cos\theta\, d\theta$ $\qquad$ $dx_c = b\cos\theta\, d\theta$

$y_c = b + b\cos\theta$

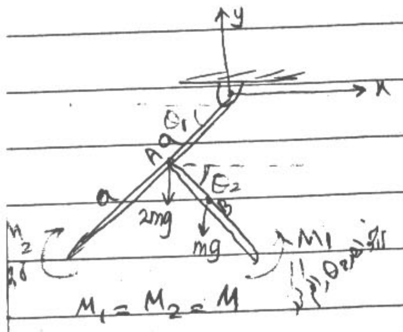
$dy_c = -b\sin\theta\, d\theta$ $\quad \rightarrow \quad P\cos\theta = T(\cos\theta/2 \cdot \sin\theta - \sin\theta/2 \cos\theta)$

$P\cos\theta = T\sin(\theta - \theta/2)$

$P\cos\theta = T\sin\theta/2$

$$\rightarrow \quad \boxed{T = P\frac{\cos\theta}{\sin\theta/2}}$$

مسئله) جرم هر میله M است، θ_1 و θ_2 تعادل کدام است؟ (اجباری نیست)



یکبار $d\theta_1$ را صفر می‌کنیم تا θ_2 بدست بیاید.

" $d\theta_2$ " " θ_1 " " .

جواب: $\cos\theta_1 = \dfrac{2M}{3\,mga}$ و $\cos\theta_2 = \dfrac{2M}{mga}$

$y_A = a\sin\theta_1 \longrightarrow dy_A = a\cos\theta_1 d\theta_1$

$y_B = a\sin\theta_1 + \frac{a}{2}\sin\theta_2 \longrightarrow dy_B = a\cos\theta_1 d\theta_1 + \frac{a}{2}\cos\theta_2 d\theta_2$

$-2mg(-dy_A) - mg(-dy_B) - M_1 d\theta_2 - M_2 d\theta_1 = 0$

$2mg\,a\cos\theta_1 d\theta_1 + mg(a\cos\theta_1 d\theta_1 + \frac{a}{2}\cos\theta_2 d\theta_2) - M_1 d\theta_2 - M_2 d\theta_1 = 0$

$3mga\cos\theta_1 \cancel{d\theta_1} = M_2 \cancel{d\theta_1}$ ← یکبار $d\theta_2 = 0$ قرار می‌دهیم

استاتیک

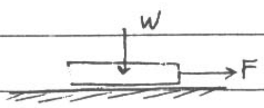
$\boxed{\cos\theta_1 = \frac{M}{3mga}}$

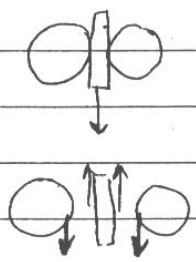
$mg\frac{a}{2}\cos\theta_2 = M_1$ ← یکبار $d\theta_1 = 0$ قرار می‌دهیم

$\rightarrow \boxed{\cos\theta_2 = \frac{2M_1}{mga}}$

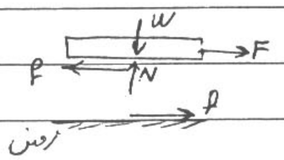
یادآوری نکات مهم :

ضریب اصطکاک لغزشی μ :





هنگامی که جسمی حرکت می‌کند به دستکها در جهت جهت نیروی اصطکاک وارد می‌شود. و به خود سطح در خلاف جهت نیرو وارد می‌شود.

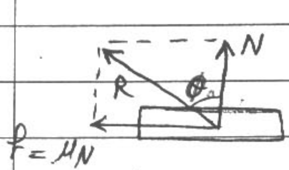


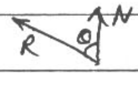
نیروی اصطکاک لغزشی : $f = \mu N$

عکس العمل نرمال N

عکس العمل سطح R

زاویه اصطکاک ϕ_0

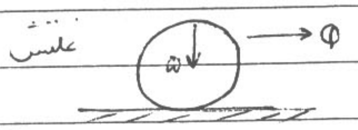




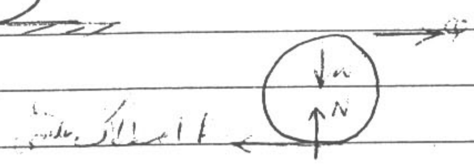
$\tan\phi_0 = \mu$

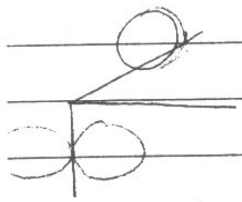
زاویه بین عکس العمل نرمال N و عکس العمل سطح R

ضریب اصطکاک غلتشی :



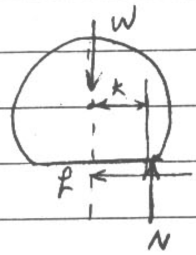
در مسائل غلتش اجسام همواره کروی اند ولی هر لغزش هر شکلی می‌توانند باشند.





چون N و W که هم راستا هستند خنثی می‌کنند ولی ← دیاگرام آزاد غلط
Φ و f یک کوپل ایجاد می‌کنند که یعنی جسم همواره حرکت می‌کند.

در مسائل بیان دیاگرام غلط را رسم کنند ولی مقدار f را از رابطه زیر بدست آورید.



ضریب اصطکاک غلتشی K برحسب (cm)

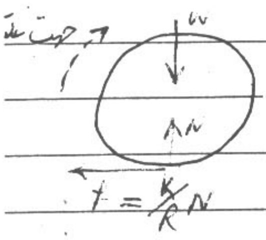
یعنی همان میزان پخش

$$N.k = f.R$$

$$f = \frac{k}{R} N$$

واحد [illegible] ضریب اصطکاک غلتشی طول است

لذا از این به بعد در مسائل دیاگرام آزاد غلط زیر استفاده می‌شود.



نسبت ضریب اصطکاک غلتشی $\frac{k}{R}$

ضریب اصطکاک فقط به جنس ماده وابسته است. لذا $\frac{k}{R}$ نسبت ضریب اصطکاک غلتشی است و k را ضریب اصطکاک غلتشی می‌نامند.

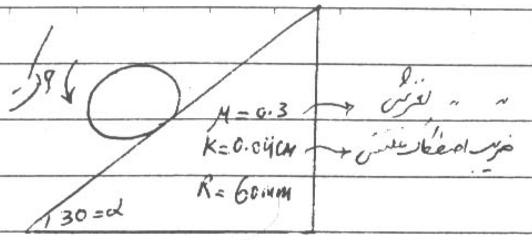
(با وجود اینکه جسم حرکت کند به سمت پایین سطح شیبدار حرکت کند به سمت بالا این اصطکاک سطح شیبدار [illegible] و در این جسم [illegible] بود برای مثال بعد)

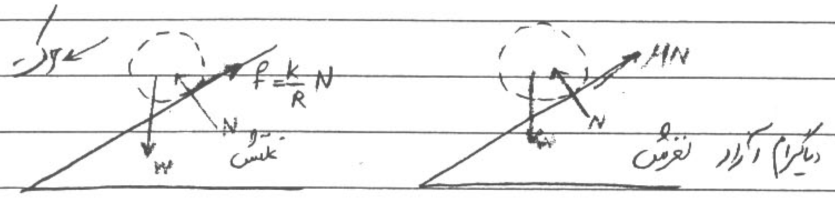
مثال) کدام گزینه صحیح است؟

۱) ابتدا جسم می‌غلتد.

۲) ابتدا جسم می‌لغزد.

۳) همزمان می‌غلتد و می‌لغزد.





اگر $\frac{k}{R} < \mu$ ابتدا می‌غلتد و اگر $\frac{k}{R} > \mu$ ابتدا می‌لغزد و اگر $\frac{k}{R} = \mu$ همزمان می‌غلتد و می‌لغزد.

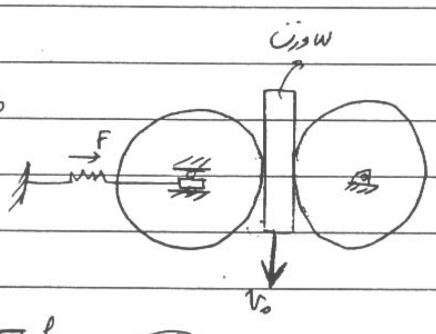
مثال) کدام گزینه صحیح است؟

W وزن قطعه ?

R شعاع غلتک

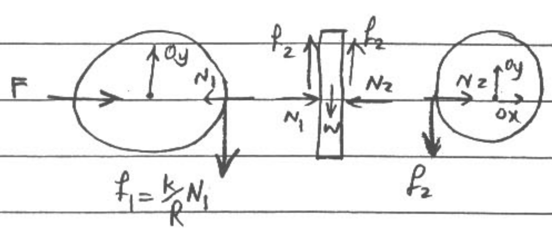
k ضریب اصطکاک غلتشی

F نیروی فنر



جواب: $W = \frac{2k}{R} F$

صفحه با سرعت ثابت v_0 حرکت می‌کند و از لغزش جلوگیری شده است.

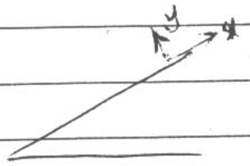


$$W = f_1 + f_2$$

$$W = \frac{k}{R} N_1 + \frac{k}{R} N_2$$

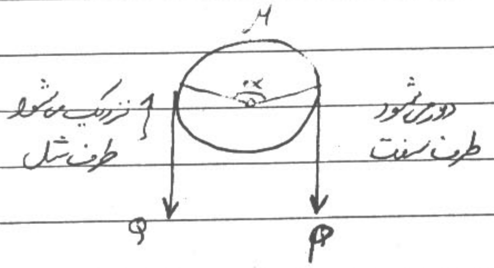
$$N_1 = N_2 \Rightarrow W = \frac{2k}{R} N_1$$

1 درغلطک $\sum F_x = 0 \rightarrow F = N_1$ $\boxed{W = \frac{2kF}{R}}$



** درسطوح شیبدار محورکی مختصات را در راستای محور انتخاب می کنیم.

قرقره ها :



رابطه اویلر :

زاویه تماس طناب : α

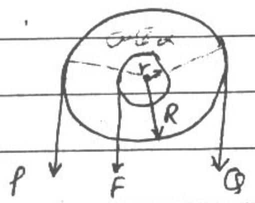
ضریب اصطکاک طناب و قرقره μ

$$P_{\text{سفت}} = Q_{\text{شل}} \cdot e^{\alpha\mu}$$

$$Q = P \cdot e^{-\alpha\mu}$$

مثال) کدام رابطه صحیح است ؟

$$\begin{cases} P = Qe^{\mu\alpha} \\ Q = Pe^{\alpha\mu} \end{cases}$$



$$\sum M_O = 0$$

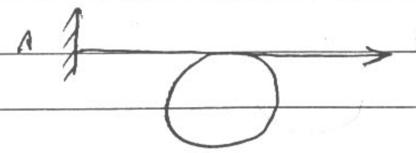
$$-PR + QR - Fr = 0$$

$$QR = PR + Fr$$

$Q > P$ لذا Q طرف سفت است

$$\rightarrow Q = P_{\text{شل}} \cdot e^{\alpha\mu}$$

مثال) طناب چند دور حول قرقره بچرخد تا نیروی کشش در تکیه‌گاه A برابر 800N شود؟ $\mu=0.1$



$2000 = 800e^{0.1\alpha}$

مهم

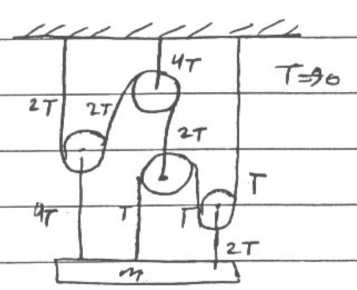
$\alpha =$ رادیان

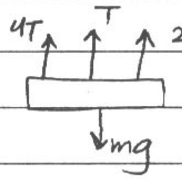
$n = \frac{\alpha}{2\pi}$ تعداد دور

$\alpha = 2\pi N$

زاویه پیچش طناب — تعداد دور

مثال) کدام نیروی کشش T صحیح است؟ اصطکاک صفر است.



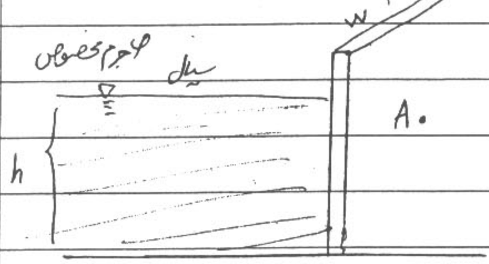


1) $T = \frac{1}{mg}$

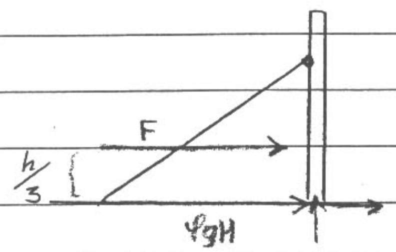
2) $T = \frac{1}{7} mg$

نکته) سیم در قرقره گیر یا اصطکاک نداریم $\mu = 0$ یعنی طرف شل و سفت با هم برابرند.

تذکر:



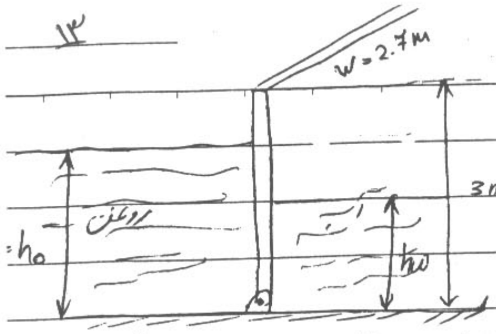
نیروی وزن سیال در دیوار آرام آزاد تأثیر ندارد.



$F = \frac{1}{2}\overbrace{\rho g h}^{P} . hw$

$P = \frac{F}{A}$

$F = \frac{1}{2} A_0 \rho g h$

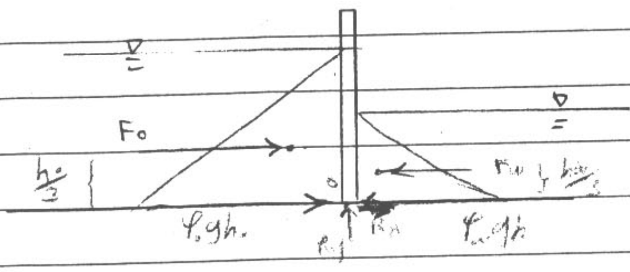


مثال) حداکثر ارتفاع h کدام است؟

اگر سیال در یک ظرف محبوس حتماً باید فشار در نظر می‌گیریم.
ولی ما در اینجا در هر دو طرف سیال داریم پس فشار نمی‌گذاریم

$\rho_o = 0.85\ gr/cm^3$ جرم مخصوص روغن ρ_w جرم مخصوص آب $= 1\ gr/cm^3$

جواب مسئله : 1.9m



F نیرو $= \gamma h_c A$
وارد بر سطح افقی
فاصله مرکز سطح تا سطح آزاد

$F_o = \frac{1}{2} \rho_o g h_o . h_o . w \to 2.7m$

$F_w = \frac{1}{2} \rho_w g h_w . h_w . w$

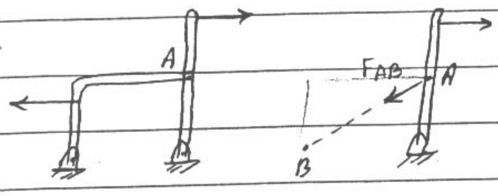
$\sum M_o = 0$

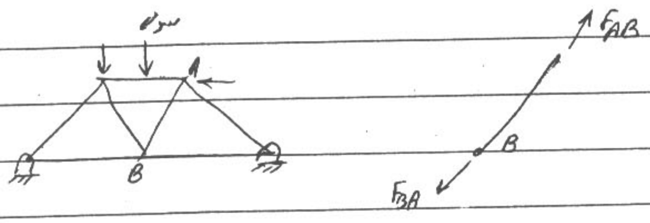
$F_o . \frac{1}{3} h_o = F_w . \frac{1}{3} h_w \to h_w =$ بدست می‌آید

اعضای دو نیرویی :

در هر سال حداقل ۲ تا مسئله دو نیرویی م...

اعضایی که فقط در دو نقطه بر آنها نیرو وارد می‌شود. مثلاً تمام خرپاها دو نیرویی هستند مگر اینکه نیروی سومی هم به عضو خرپا وارد شده است.



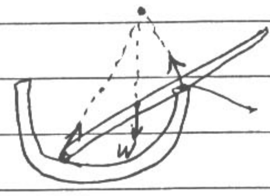


عکس العمل های روی این اعضاء در راستای خطی است که امتداد آن نقاط اثر دو نیرو را به هم وصل کند.

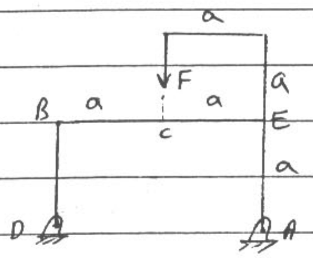
اعضای سه نیرویی:

در یک صفحه سه نیروی موازی در حال تعادل است که هر سه نیرو از یک نقطه عبور کند.

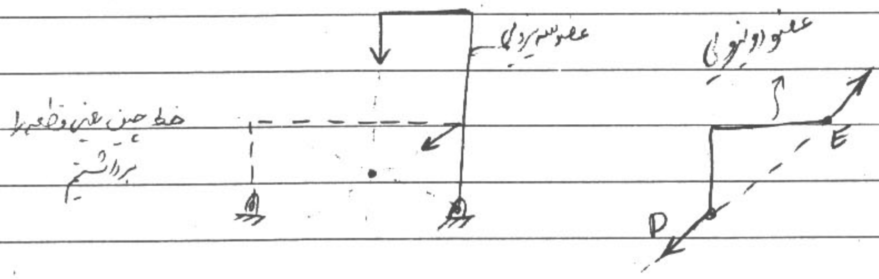
شرط: اگر معادل دو نیرو باشند شامل سه نیرویی نمی‌شود.



مثال) عکس العمل A از کدام نقطه می‌گذرد؟

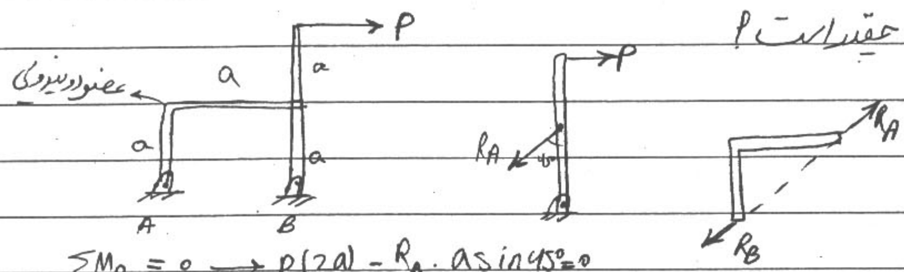


1) B 2) C 3) D 4) E



مثال) عکس العمل A چقدر است؟

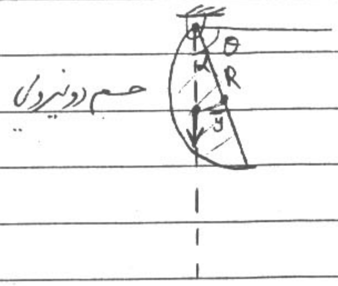
حل)



$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow P(2a) - R_A \cdot a\sin 45° = 0$

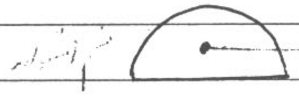
$R_A = \square$

مثال) θ تعادل کدام است؟ وزن نیم استوانه W است.

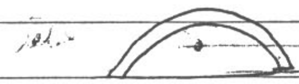


حل مسئله:

تذکر مهم:



$\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$



$\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$

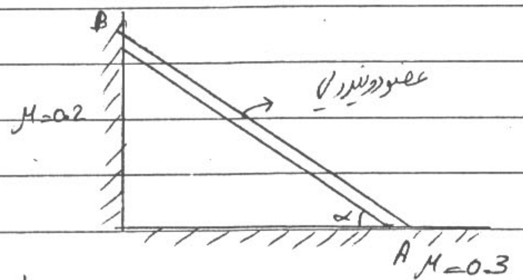
$$\tan\alpha = \frac{\bar{y}}{R} = \frac{4R}{3\pi R} = \frac{4}{3\pi}$$

$$\theta = 90 - \alpha$$

$$\cot\theta = \tan\alpha = 4/3\pi$$

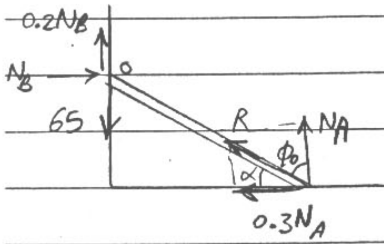
$$\theta = \operatorname{arc\,cot} \frac{4}{3\pi}$$

مثال) شخصی با وزن 65kg می‌خواهد خود را به بالاترین نقطه نردبان برساند، حداقل α چقدر است.



راه دوم) $\Sigma M_B = 0 \quad 0.3N_A\, l \sin\alpha = N_A\, l \cos\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{1}{0.3}$$



راه اول) $\alpha = 90 - \phi_0$

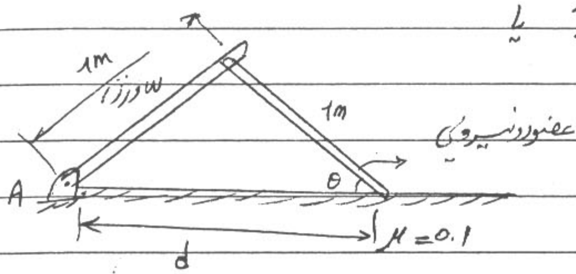
$$\phi_0 = \arctan 0.3$$

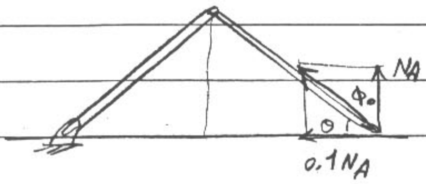
$\alpha =$ بدست می‌آید

چون عضو دو نیرویی است عکس العمل ها باید راستای خطی باشد که ابتدا را به انتها برساند.

در مسائل استاتیک اتکا باید جسم را در آستانه لغزش قرار دهیم.

مثال) حداقل d چقدر است؟ یا
θ تعادل کدام است؟





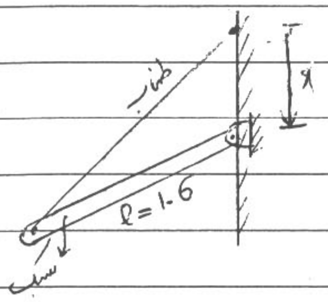
ضمناً عکس العمل دو نیرویی در راستای میله است.

$\phi_0 = \arctan 0.1 \qquad \tan\phi_0 = 0.1$

$\theta = 90 - \phi_0$

$\cot\theta = \tan\phi_0 = 0.1 = \dfrac{d/2}{\sqrt{1 - d^2/4}} \longrightarrow d$ بدست می‌آید.

مثال) ماکزیمم مقدار x کدام است؟

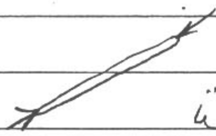


1) $x = 1.6$

2) $x = 0.8$

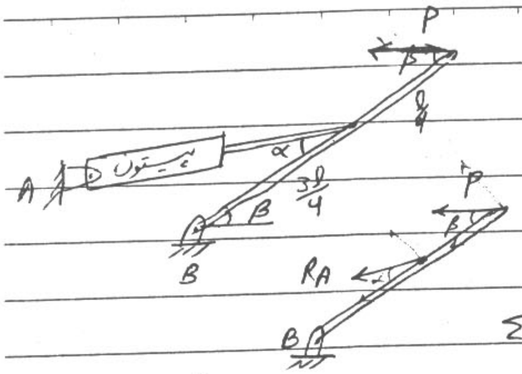
3) $x = 3.2$

4) $x = 0$



$x=0$ چون میله عضو دو نیرویی است
پس باید طناب بر میله منطبق شود تا نیروها هم راستا
شوند ← $\boxed{x=0}$ 2

سؤال) عکس العمل A چقدر است؟



جواب: $R_A = \frac{4P}{3} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\phi}$

سیلندر عضو دو نیرویی است

$\Sigma M_B = 0$

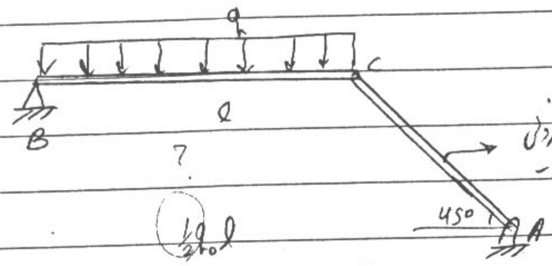
$-Pl\sin\beta - R_A \frac{3l}{4}\sin\alpha = 0$

$R_A =$ بدست می آید

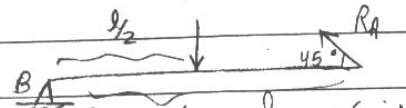
* مرکز گشتاورها را حول B در نظر گرفته نیروها را در امتداد میله و عمود بر آن تجزیه می کنیم

سؤال) عکس العمل A در دو شکل زیر کدام است؟

(1)



$\frac{1}{2} q_0 l$

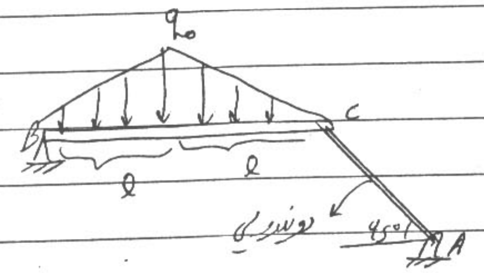


(نیروها را در امتداد میله و عمود بر آن تجزیه می کنیم)

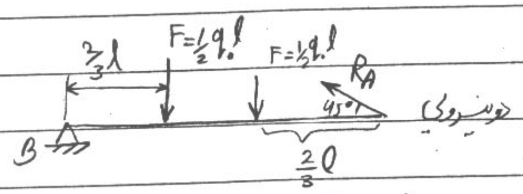
$R_A \sin 45^\circ \times l = \frac{1}{2} q_0 l \times \frac{l}{2}$

$\Rightarrow R_A$ بدست می آید

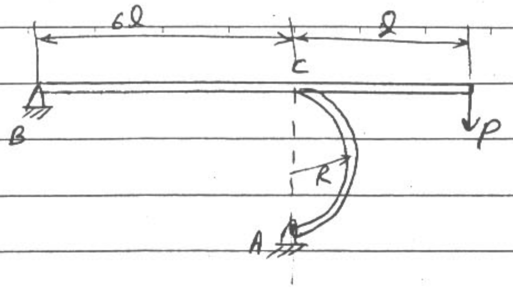
(2)

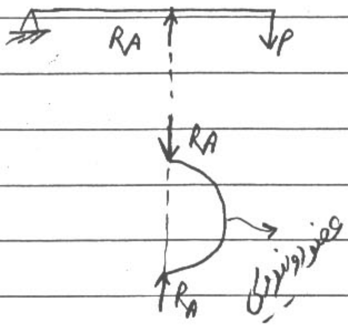


در اینجا چون عکس العمل ها مجهول است می توان بار گسترده را به صورت متمرکز در آورد.



$\Sigma M_B = 0 \rightarrow \frac{1}{2} q_0 l \cdot \frac{2}{3} l + \dots = 0$ R_A بدست می آید

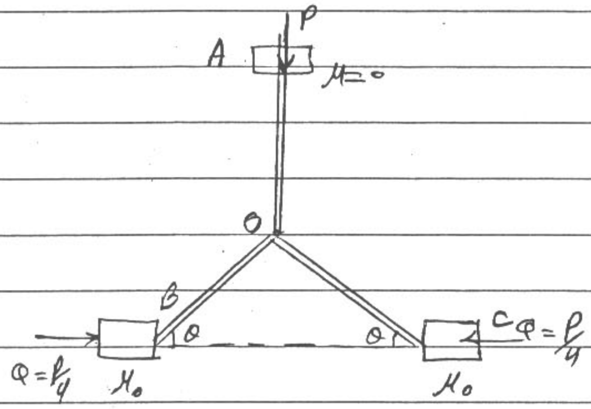




$\Sigma M_B = 0$

$P(7l) - R_A \cdot 6l = 0$

$R_A =$ حرکت می‌کند.



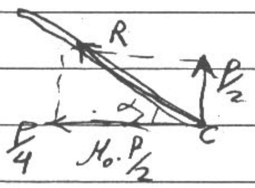
مثال) کدام θ تعادل صحیح است؟

1) $\tan\theta = \dfrac{2}{1+\mu}$

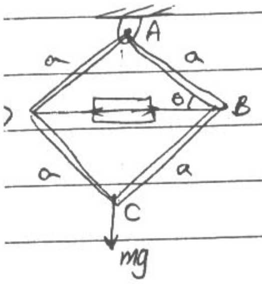
2) $\tan\theta = \dfrac{2}{1+2\mu}$

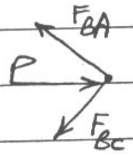
چون شکل متقارن است. $P/2$ برای O.

$$\tan\alpha = \frac{P/2}{P/4 + \mu_0 P/2} = \frac{2}{2\mu_0 + 1}$$

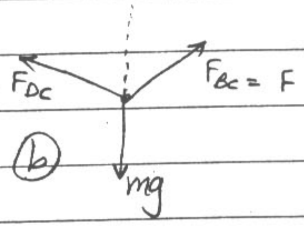


مثال) کدام نیروی سیلندر (P) صحیح است؟ یا θ تعادل کدام است؟





$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow F_{BC} = F_{BA} = F$



$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow F_{DC} = F_{BC} = F$

$\Sigma F_y = 0 \qquad mg = 2F \underbrace{\sin\theta}_{\cos\alpha}$

$$\boxed{F = \frac{mg}{2\sin\theta}}$$

حال در ⓐ داریم: $\Sigma F_x = 0$

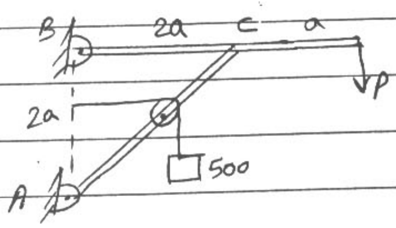
$P = 2F_{BA}\cos\theta$

$\boxed{P = mg\cot\theta} \longleftarrow$ از رابطه 2 قرار می‌دهیم

قابها و خرپاها:

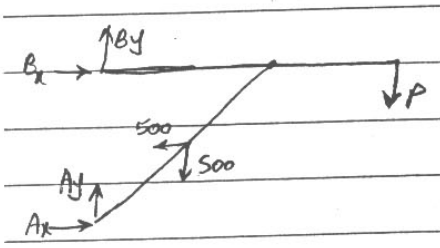
اگر از قاب سؤال بیاید به صورت مثال 2 و مثال 3 خواهد بود. مثال (1) در امتحان مطرح نیست.
چون عضو دو نیرویی ندارد

مثال 1) در قاب زیر عکس العمل A چقدر است؟

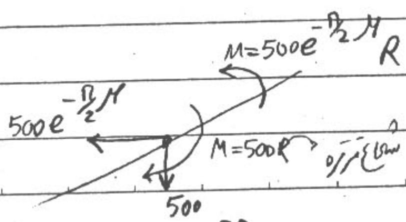


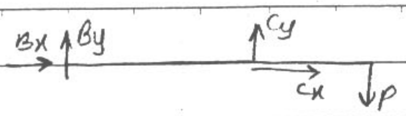
حل: ابتدا دیاگرام آزاد اصلی رسم شود.

سه معادله با ۴ مجهول A_x, A_y, B_x, B_y



اگر قرقره اصطکاک داشت:



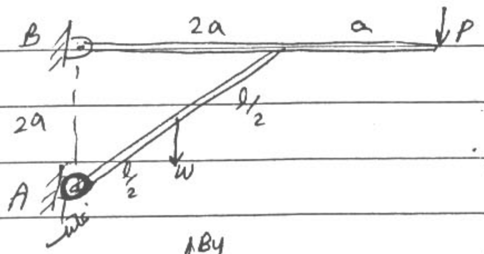


سه معادله با مجهول C_x و C_y ، B_x و B_y

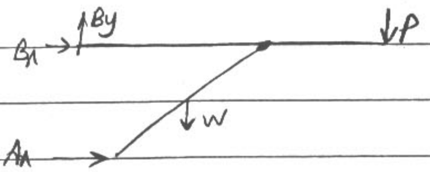
حال 6 معادله با 6 مجهول حل می‌شود

فرق این مثال با مثال قبل در این است که ۳ تا تکیه‌گاه مجهول داریم ولی در مثال قبل ۴ تا تکیه‌گاه مجهول بود و نیز در دو مثال عضو دو نیرویی اند

مثال ۲) عکس العمل A چقدر است؟



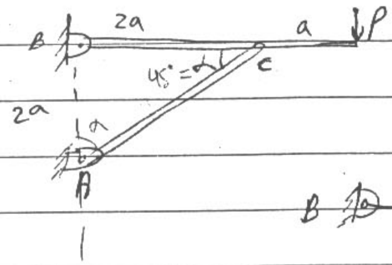
حل) عضو دو نیرویی وجود ندارد. در تکیه‌گاهها سه مجهول وجود دارد.



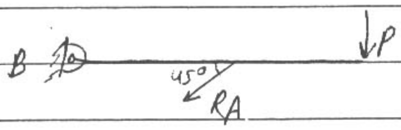
$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow A_x$ بدست می‌آید

در فصل ضمیمه

مثال ۳) عکس العمل A چقدر است؟



حل) عضو Ac دو نیرویی است



$\Sigma M_B = 0 \qquad p(3a) + R_A \cdot 2a \ \sin 45^\circ = 0$

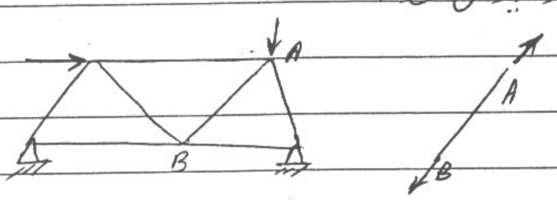
R_A بدست می‌آید

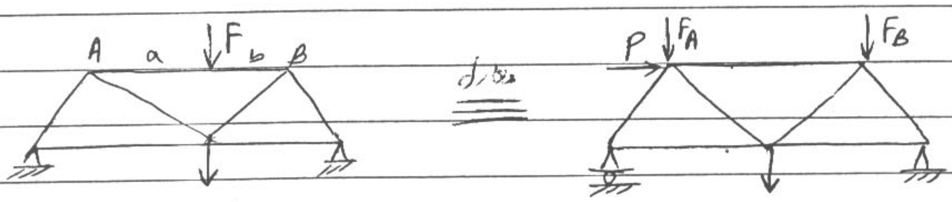
جهت R_A باید عوض شود چون منفی است.

خرپاها:

نکات مهم:

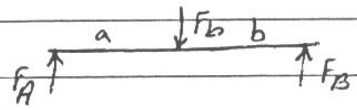
1. خرپاها حتماً بایستی به عنوان اعضاء دو نیرویی درآیند و حل شوند.



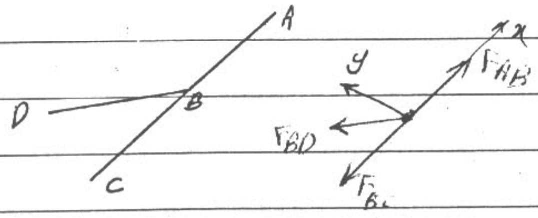


در اینجا عضو AB دو نیرویی نیست

در اینجا تمام اعضاء دو نیرویی گشته

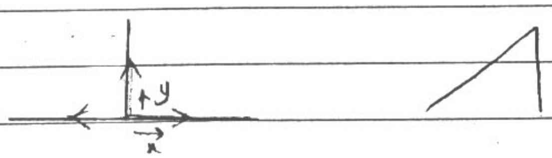


2. شناخت اعضاء صفر نیرویی:

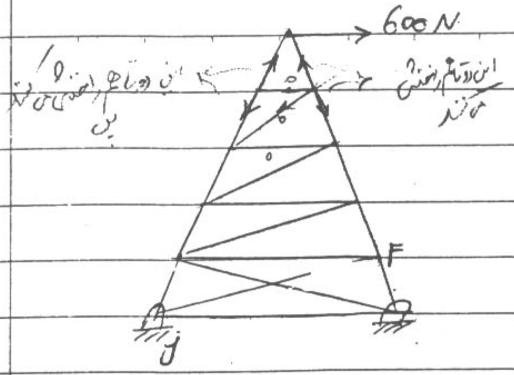


$\Sigma F_y = 0$

$F_{BD} = 0$



مثال) $F_{Fj} = ?$

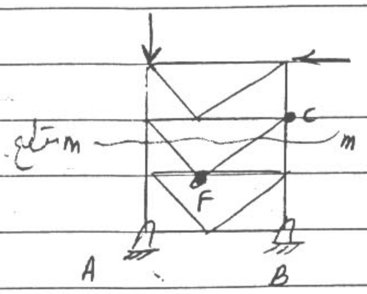


$\boxed{F_{Fj} = 0}$

درست که همیشه وقتی گزینه‌ای $F=0$ داشتیم روی آن تیک بزنید چون ممکن است عضو صفر نیرو باشد.

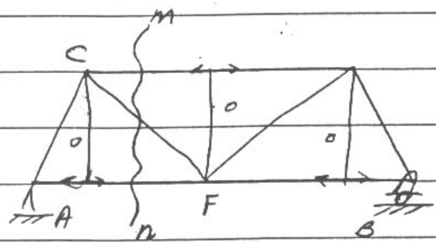
3. هرگاه نیروی داخلی در یک عضو سؤال شد دقت شود که همواره نیاز به محاسبهٔ عکس العمل تکیه‌گاه‌ها به منظور تعیین این نیروی داخلی نمی‌باشد.

مثال) $F_{Fc} = ?$



در اینجا چون تکیه‌گاه A و B در یک طرف مقطع mn واقع است نیازی به محاسبهٔ عکس العمل تکیه‌گاه‌ها نیست.

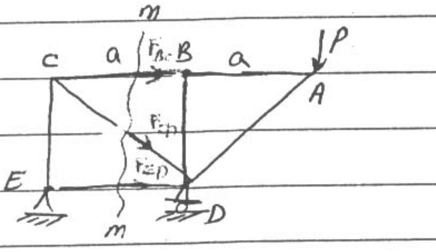
مثال) $F_{cF} = ?$

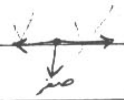


در اینجا حتماً نیاز به محاسبهٔ تکیه‌گاه A یا B داریم چون در دو طرف nm واقع شده است.

۱. اصولاً در تستها سعی شود از روش مقاطع برای محاسبه نیروهای داخلی استفاده شود مگر در حالتهای بسیار خاص که هم نیاز به روش مقطع و هم مفصل با یکدیگر می باشد.

مثال ۱) تعیین کنید F_{BC} و F_{BD}

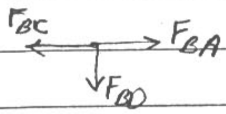




عضو BD صفر نیرویی است چون در گره B :
عضو BD فقط برای پایداری سیستم قرار داده شده است.

سعی کنید از روش مقاطع استفاده کنید.
اگر عکس العمل ها را خواستند از روابط تعادل استفاده می کنیم. ولی اگر نیروهای داخلی را خواستند یا تقاطعها یا مفاصل ولی بهتر است از روش مقاطع استفاده کنیم.

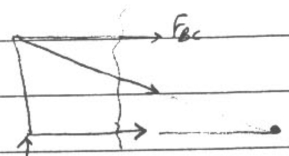
$F_{BD} = 0 \Rightarrow$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BD} = 0}$

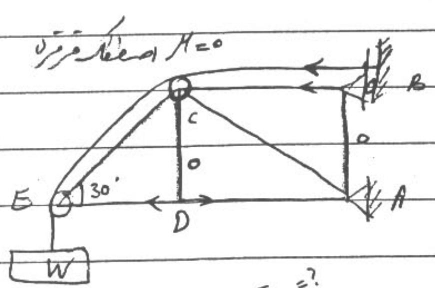
$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow R_{yE} = P$

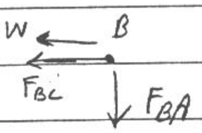
قسمت سمت راست مقطع m m را کنار گذاشته
* سعی کنید مقاطع را طوری انتخاب کنید که ماکزیمم سه تا مجهول باشد و یا اگر ۴ تا مجهول است حداقل چندتا از یک نقطه بگذرند.



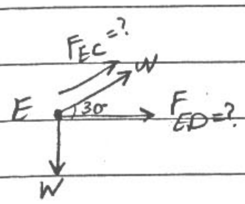
$R_{yE} = P \qquad \Sigma M_D = 0 \Rightarrow \boxed{F_{BC} = P}$

مثال) $F_{CD} = ?$
$F_{AB} = ?$
$F_{CE} = ?$



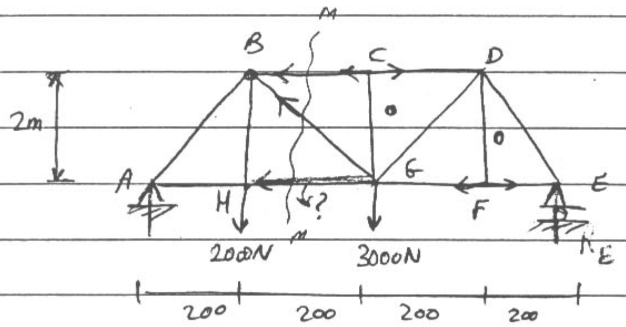


$\rightsquigarrow F_{AB} = 0$
$F_{CD} = 0$



$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow -W + F_{EC}\cos 60^\circ + W\cos 60^\circ = 0$$
$$F_{EC} = W$$

مثال) $F_{GH} = ?$



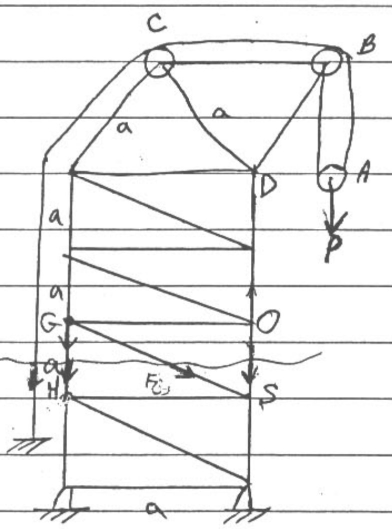
چون تکیه‌گاه‌ها در دو طرف مقطع اند حتما باید آنها را حساب کنیم

$$F_{DF} = F_{CG} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -R_E(8) + 3000(4) + 2000(2) = 0 \rightarrow R_E = \checkmark$$

قسمت سمت چپ را نگه داشته و $\Sigma M_B = 0 \Rightarrow F_{GH} = 3000N$

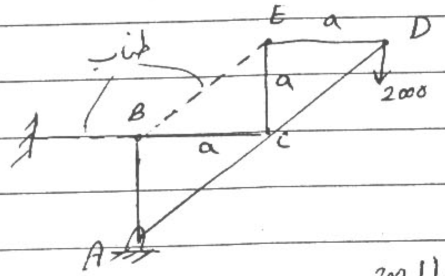
مثال) نیروی وارد بر عضو GS چقدر است؟



در اینجا چون تکیه‌گاه‌ها یک طرف مقطع قرار دارند نیازی به محاسبه عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها نیست
قسمت پایینی را نگه داشته

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \boxed{F_{GS} = 0}$$
$$0 + F_{GS}\cos 45^\circ + 0 + 0 = 0$$

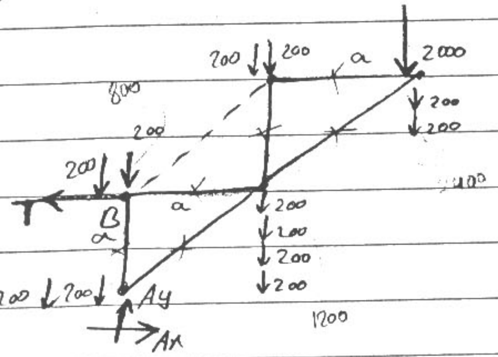
مثال) عکس العمل A کدام است؟
(وزن هر عضو 400N است)



حل: وزن به مفاصل منتقل شود تا عضو دو نیرویی شود.

طناب را جدا می کنیم

200 N از وزن یک مفصل و 200N را به مفصل دیگر می برم که مجموعاً همان وزن عضو می شود



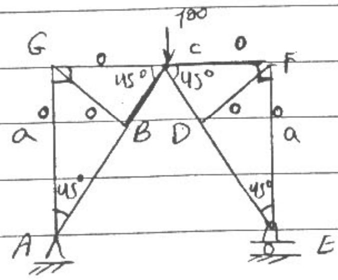
$\sum F_y = 0 \qquad -2400 - 1200 - 400 - 400 + A_y = 0$

$A_y \rightarrow$ محاسبه شود

$\sum M_B = 0 \qquad -A_x \cdot a + 1200(a) + 2400(2a) = 0 \longrightarrow A_x$ بدست می آید

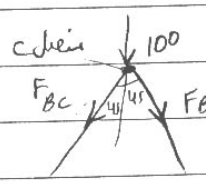
برآیند $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

مثال: $F_{BC} = ?$, $F_{CF} = ?$



عکس العمل ها را نمی خواهد در ابتدا احتیاجی به محاسبه نیست!

$F_{DF} = F_{CF} = F_{EF} = F_{GB} = F_{GC} = F_{GA} = 0$



$\sum F_x = 0 \longrightarrow F_{BC} = F_{BD}$

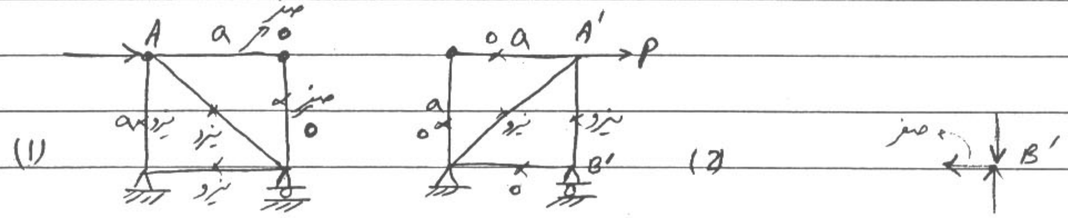
$\sum F_y = 0 \longrightarrow -100 - 2F_{BC}\cos 45° = 0$

$\longrightarrow F_{BC} = \ominus$ محاسبه

علامت منفی یعنی جهت نیرو باید عوض شود

سؤال) تغییر مکان A بیشتر است یا A' ؟

تذکر: تغییر مکان نقاط در خرپا به واسطه انرژی به واسطه مقدار نیروی وارد بر اعضا

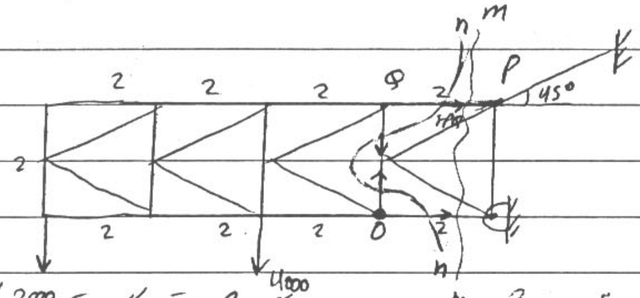


اعضا و سطح مقطع عضوها در (1) و (2) باهم برابرند.

انرژی $W_{(1)} > W_{(2)}$

تغییر مکان A > تغییر مکان A'

مثال) $F_{PQ} = ?$



مقطع mm تا ۴ مجهول دارد پس مناسب نیست ولی اگر تعداد 3 تا از اینها از یک نقطه می‌گذشت مناسب بود.

پس هر خرپایی داشتیم ابتدا مقطع مستقیم می‌زنیم اگر سه تا مجهول داشت مناسب است ولی اگر شد ۴ تا، اگر سه تایش از یک نقطه گذشت باز می‌توان ولی در غیر اینصورت باید از مقاطع دیگری استفاده کنیم.

از روش مقاطع استفاده می‌کنیم نه مفاصل.

مقطع mm جوابگو نیست. لذا مقطع nn انتخاب شود. (مقاطع سهمی، دو سهمی، خط)

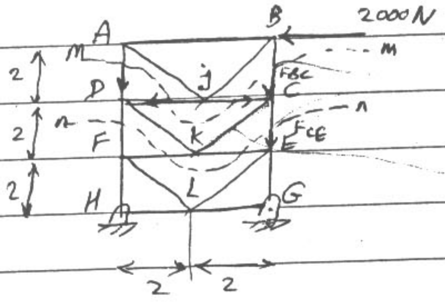
قسمت سمت راست را کنار گذاشتیم.

$\Sigma M_o = 0$

$F_{PQ}(4) - 2000(6) - (400)2 = 0$

$F_{PQ} \longrightarrow$ محاسبه می‌شود.

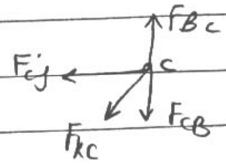
مثال) $F_{CK}=?$



اگر مجهول ها سه تا
مقطع سه‌ای حل می‌شود
ولی وسطی ها نمیرد

سازه‌های مرکب: بیشتر مقطع مستقیم با سه مجهول که اینها مشکلی ندارند. در تمام سازه‌ها عضوهای کناری با مقطع شروع حل می‌شوند.

دیاگرام آزاد نقطه



مانند مثال قبل F_{BC} از مقطع mm و F_{CE} از مقطع nn بدست می‌آید.

BC را با علامت منفی بدست می‌آوریم

مقطع mm ← $\Sigma M_D=0 \Rightarrow F_{BC}(4)-2000(2)=0 \rightarrow F_{BC}$ محاسبه

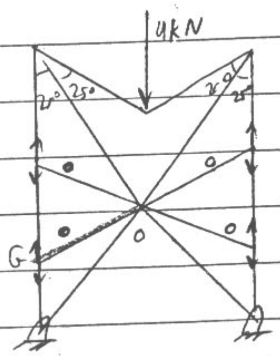
مقطع nn : $\Sigma M_F=0 \Rightarrow F_{CE}(4)-2000(4)=0 \rightarrow F_{CE}$ محاسبه

CE را با علامت منفی بدست می‌آوریم

حال در دیاگرام آزاد C : $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{CK}=$ بدست می‌آید.

* اعضای کناری را اگر با یک مقطع مستقیم نتوانستیم با یک مقطع سه‌ای می‌رویم. و اگر یک مقطع کم بود دو مقطع می‌زنیم.

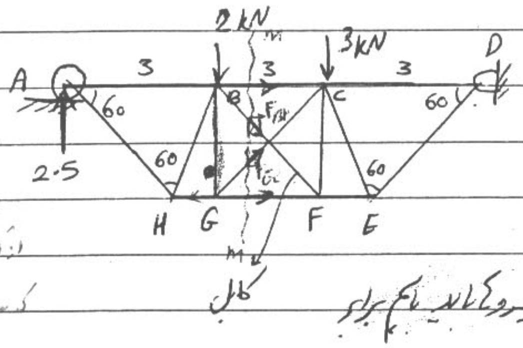
مثال)



$F_{OG}=?$

جواب $=0$

مثال مهم



نکته) کابلها برای این است که هندسه قطعه را ثابت نگه دارد.
کابلها نیروی فشاری را نمی‌توانند تحمل کنند چون که در کابلها نیرو باید کششی باشد. همچنین در کابلها نیروها باید با هم برابر باشند.

به سمت پائین که 0.5 باید پائین
از آنجا که ...
که ... دارند
BF و یا CG هستند
باید دقت کنیم که چون در هر دو عضو
...
باید نیروها از عضو خارج شوند
که CG به سمت بالا و BF به سمت پائین است. بنابراین
BF درست است و GG صفر است

جواب: BG = 0 است زیرا:
مقطع mm انتخاب شود. قسمت راست کنار گذاشته شود.

$$\Sigma M_D = 0 \longrightarrow A_y(9) - 2(6) - 3(3) = 0 \qquad A_y = 2.5\,kN$$

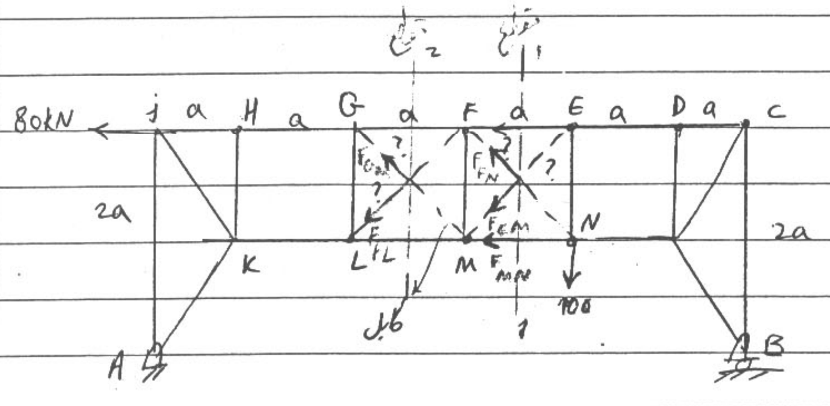
$\boxed{F_{GC} = 0}$

سمت چپ نیروی ... پائین می‌ماند. $2.5 - 2 = 0.5$

* F_{BF} و F_{GC} ... با هم برابرند و یکی صفر است، پس این نیروی 0.5 باید با F_{BF} کشش شود بنابراین F_{BG} صفر باید باشد تا F_{GC} صفر شود.

* کابلها همواره تحت کشش می‌باشند و یا اینکه یکی از کابلها نیروی صفر دارد.

مثال)



$F_{FN} = ?$
$F_{GM} = ?$
$F_{EM} = ?$
$F_{FL} = ?$

$$\Sigma M_A = 0 \Longrightarrow B_y(6a) - 100(4a) + 80(2a) = 0 \Longrightarrow B_y = 40\,kN$$

مقطع 1-1: سمت چپ را کنار گذاشته

$F_{EM} = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow 40 - 100 + F_{FN} \cdot \sin 45° = 0 \longrightarrow F_{FN} = 84.85\,kN$$

در مقطع 2 :

$F_{FL}=0$

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow 40-100+F_{GM}\sin 45^\circ=0 \qquad F_{GM}=-84.85\ kN$

محاسبه F_{MN} : در مقطع 1 :

$\Sigma M_F=0$

$\longrightarrow F_{MN}\times a+100a-40(3a)=0$

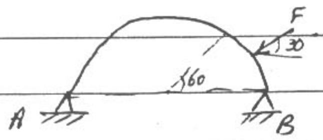
$F_{MN}=20\ KN$

* در مطالبها یا دو تا کشش نیاز داریم و باید از نیروهای کششی صفر است.

تیرهای خمیده :

۳ نوع مسئله مطرح است.

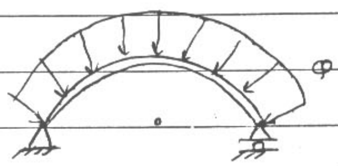
مسأله نوع 1 : عکس العمل که با نیروهای داخلی مورد سؤال است.



بار متمرکز

مثلاً در $\theta=60$ نیروهای داخلی را می‌خواهد

مسأله نوع 2 : عکس العمل که مجهول است.

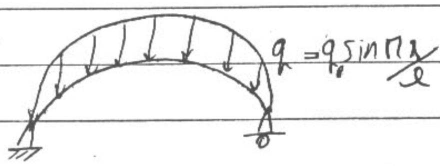


بار یکنواخت و از مرکز می‌گذرد.

(روش برآیند گیری)

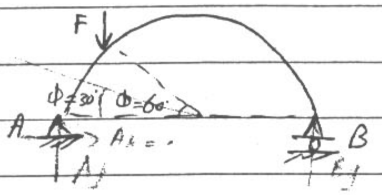
در مسائل نوع 2 همه بارها از مرکز عبور می‌کنند.

مسأله نوع 3 :



در اینجا توزیع بار غیر یکنواخت و q که عمودی است.

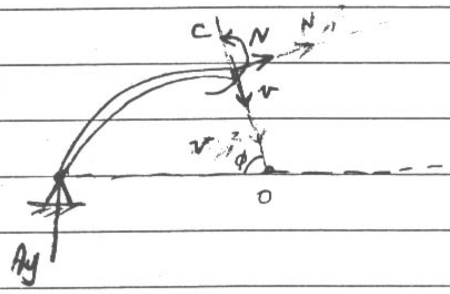
مثال) اولاً عکس العمل که حقیقی است و ثانیاً نیروهای داخلی در $Q=30$ و $\phi=60^\circ$ را محاسبه کنید

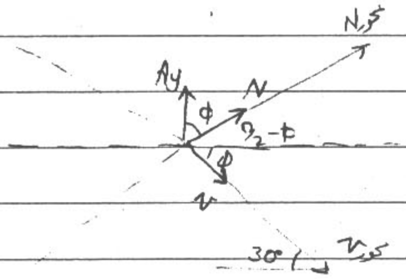


محاسبه عکس العمل ها:

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow A_y+B_y=F$

$\Sigma M_B=0 \longrightarrow A_y(2R)-F(R+R\cos 60^\circ)=0 \qquad A_y=\frac{3}{4}F,\ B_y=\frac{1}{4}F$





N در جهت: $N+\frac{3}{4}F\cos\phi=0 \longrightarrow N=-\frac{3}{4}F\cos\phi \qquad \phi=30^\circ$

V در جهت: $V-\frac{3}{4}F\sin\phi=0 \longrightarrow V=\frac{3}{4}F\sin\phi$

$\Sigma M_C=0 \longrightarrow \frac{3}{4}F(R-R\cos\phi)-M=0$

$M=\frac{3}{4}(1-\cos\phi)FR$

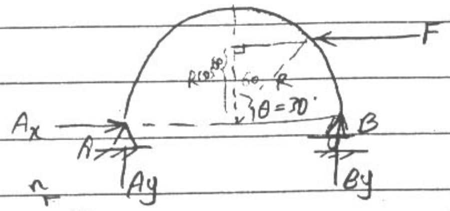
* انتخاب محورها را دقت کن.

نکته) در تیرهای خمیده تحت بار متمرکز نیروی داخلی برشی دارای توزیع sin و توزیع نیروی نرمال cos است.

مثال) عکس العمل A و B چقدر است؟

ممان داخلی و نیروی برشی در $\theta = 60^\circ$ چقدر است؟

حل جوام :

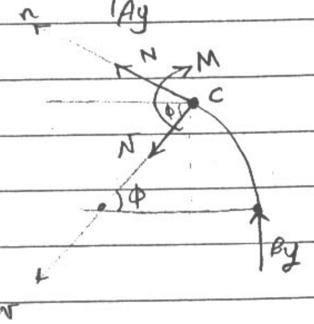


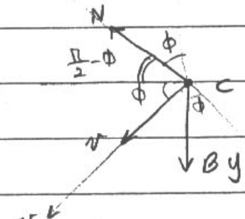
$\Sigma M_A = 0 \quad B_y \times 2R + F \times R\cos 60 = 0$

$\boxed{B_y = -\frac{F}{4}}$

$A_y + B_y = 0 \quad A_y = -B_y = \frac{F}{4}$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = F \qquad \boxed{A = \sqrt{F^2 + \frac{F^2}{16}}}$





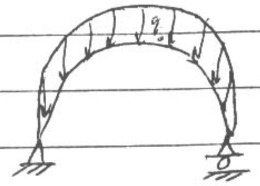
$\Sigma F_n = 0 \quad N - B_y\cos\phi = 0$

$\boxed{N = B_y\cos\phi}$ توزیع کسینوسی

$\Sigma F_v = 0 \rightarrow V + B_y\sin\phi = 0 \rightarrow \boxed{V = -B_y\sin\phi}$ توزیع سینوسی

$\Sigma M_C = 0 \quad M = B_y(R - R\cos\phi)$

مسئله) عکس العمل ها چقدر است؟

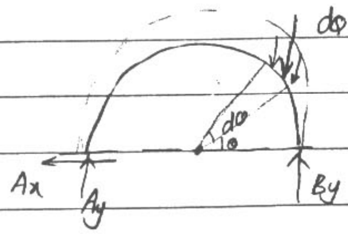


$q(\theta) = q_0 \sin\theta$

در این ترتیب مسائل معمولاً عکس العمل ها را سئوال می کنند

امکان آوردن این ترتیب مسائل هم است

$dQ = q(\theta) R\, d\theta \rightarrow$ المان نیروی متمرکز در یک قوس به اندازه $d\theta$



$q(\theta) = q_0 \sin\theta$

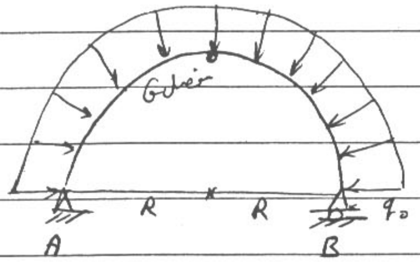
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = \int_0^\pi dQ = \int_0^\pi q(\theta) R\, d\theta$

$A_y = B_y$ و $\Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y(2R) - \int_0^\pi dQ (R + R\cos\theta)$

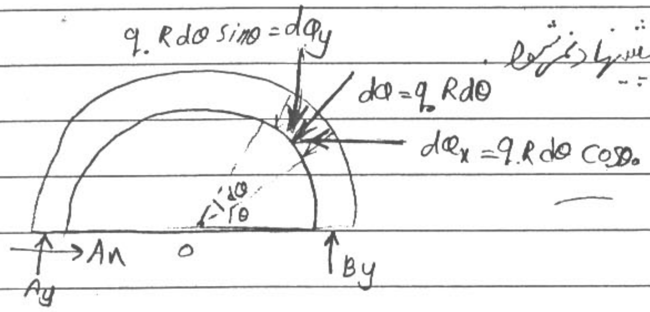
$\Leftarrow B_y$ محاسبه می شود

دهم مثال) عکس العمل ها در A و B و مفصل BG محاسبه شود.

مسئله نوع دوم:



روش ۱) روش مستقیم انتگرال گیری که پیشنهاد نمی‌شود



$$\sum F_x = 0 \longrightarrow A_x - \int_0^{\pi} dQ_x = 0$$

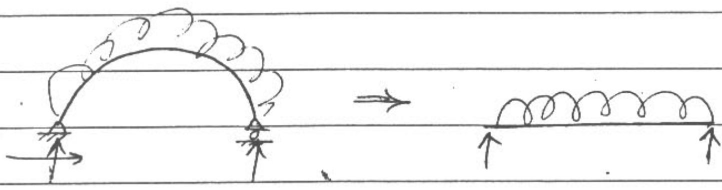
$$\sum F_y = 0 \longrightarrow A_y + B_y = \int_0^{\pi} dQ_y$$

?

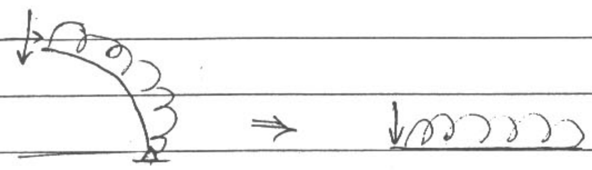
$$\sum M_A = 0 \longrightarrow -B_y(2R) - \int dQ_x . R\sin\theta + \int dQ_y (R + R\cos\theta) d\theta = 0$$

روش تستی: (روش تصویر)

نیرو گسترده کنش بار یکنواخت:

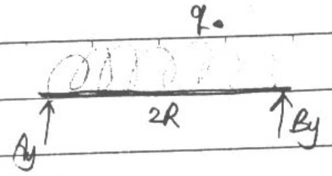


نیرو گسترده را مسطح می‌کنیم عکس العمل که در راستای تسطیح است از بین می‌رود.



اگر در راستای x مسئله را مسطح کنیم نیروی افقی از بین می‌رود و اگر در راستای y مسئله را مسطح کنیم نیروی قائم از بین می‌رود.

۲۳

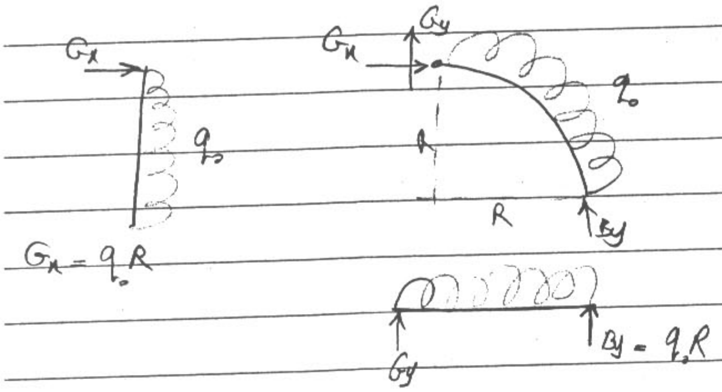


$\Sigma F_x = 0$

$A_x = 0$

روش تصویری

$$A_y = B_y = \frac{q_0 \cdot 2R}{2} = Rq_0$$



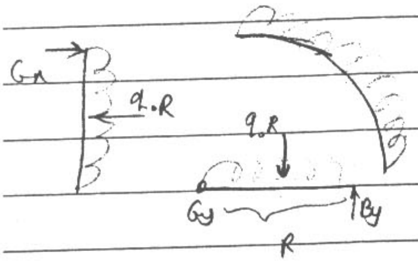
$G_x = q_0 R$

چون نقطه G لولا است ممان داخلی در آن نداریم.

$\boxed{G_y = 0}$

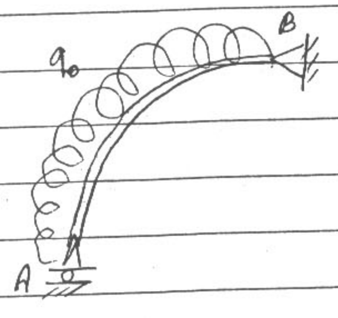
اضافی : $\Sigma M_G = 0$

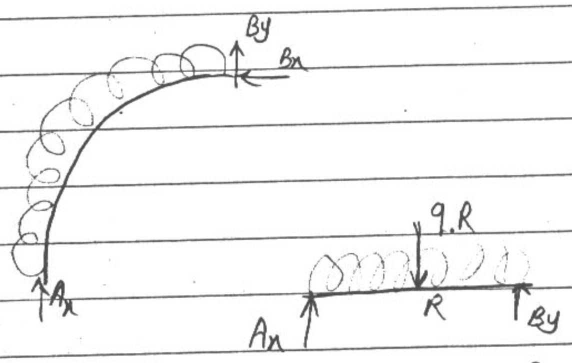
اگر ممان نسبت به G را بخواهیم چه می‌شود؟



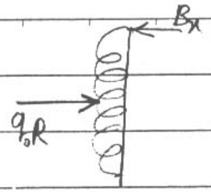
$$\Sigma M_G = q_0 R \cdot \frac{R}{2} + q_0 R \cdot \frac{R}{2} + B_y \cdot R$$

مثال) عکس العمل A کدام است؟



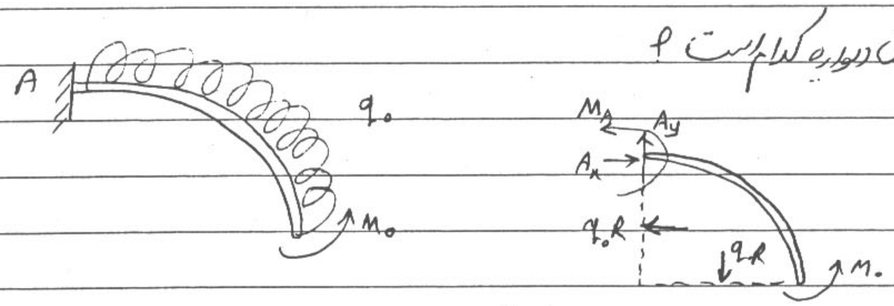


$$A_y = B_y = q_0 \frac{R}{2}$$



$\Rightarrow B_x$ محاسبه

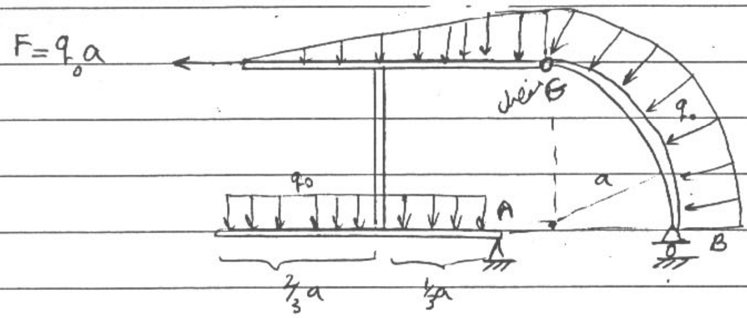
مثال) عکس العمل ممان دیوار کدام است ؟



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -M_0 - M_A + q_0 R.\frac{R}{2} + q_0 R.\frac{R}{2} = 0$$

$\longrightarrow M_A$ محاسبه می‌شود.

مثال) کدام صحیح است ؟



1) $G_y = -\frac{15}{8} q_0 a$

2) $A_x = \frac{1}{8} q_0 a$

3) $G_x = \frac{7}{8} q_0 a$

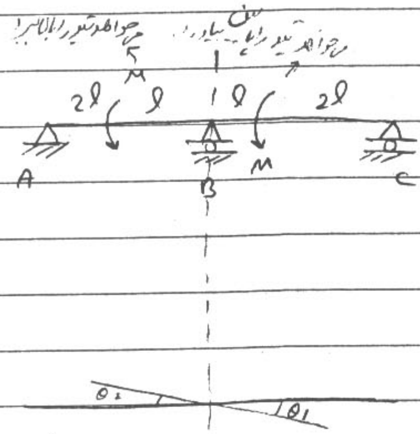
4) $A_y = \frac{27}{8} q_0 a$

5) $B_y = 0$

مسائل عمومی :

ماشین آلات ، اعضاء سه نیرویی - تماس سطح

مثال) عکس العمل A^V عمودی چقدر است ؟



حل) مسائل نامعین در استاتیک با انرژی است یا نقشان .

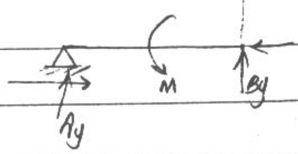
به علت تقارن شیب صفر است

$\theta_1 = \theta_2$

$\theta_1 + \theta_2 = 0$

شیب صفر است .

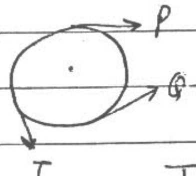
M داخلی صفر است .



$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow A_y (3l) = M_0$

$A_y = \frac{M_0 l}{3}$

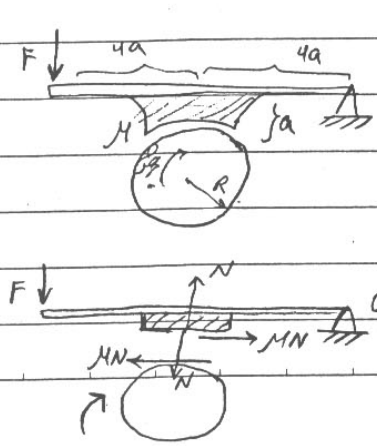
مثال) گشتاور اصطکاک چقدر است ؟



در مسائل استاتیک گشتاور اصطکاک برای استوانه است .

$T_f = P.R - QR + TR$

مثال) گشتاور اصطکاکی ؟



$T_f = MNR$

محاسبه N:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow -F(8a) + N \cdot 4a - \mu N a = 0$$

N و T_f بدست می‌آید

مثال) برای ایجاد خودترمزی کدام گزینه صحیح است؟ (در مثال قبل)
خودایستی

1) $\mu \cancel{>} 4$

2) $\mu \cancel{>} 2$

3) $\mu \cancel{>} 1$

4) $\mu > 3$

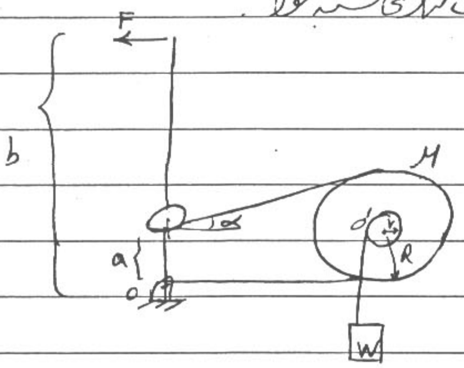
برای خودترمزی به ازاء نیروی محرک صفر شرایط تعادل نوشته شود یعنی: یعنی $F=0$

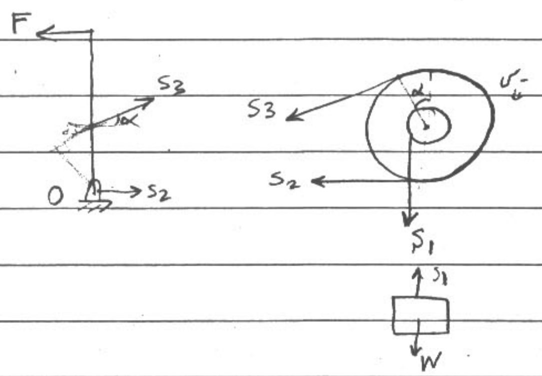
$$-F(6a) + 4Na - \mu Na = 0$$

$$\mu = 4$$

مثال) نیروی ترمزی F برای آنکه وزنه W با سرعت ثابت حرکت کند محاسبه شود.

جواب: $F = \frac{a}{b} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\mu \alpha}{e^{(\pi+\alpha)\mu} - 1} W$





طرف سمت و شکل را جدا می‌کنیم در حالتیکه چه نیروهایی وارد می‌کند

$$\sum M_o = 0 \longrightarrow F \cdot b = S_3 \cdot a \cdot \sin(a_o + \alpha)$$

$$\boxed{F = \frac{a}{b} S_3 \cos\alpha} \quad (1)$$

$S_1 = W$

(رابطه اویلر ?)

$\sum M_{o'} = 0 \longrightarrow -S_3 R + S_2 R - S_1 r = 0 \Rightarrow$

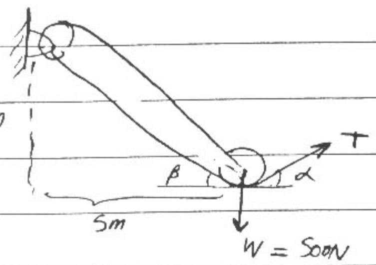
$S_2 R = S_3 R + S_1 r$ ②

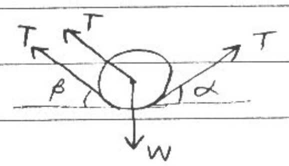
$S_2 > S_3 \Rightarrow$ $S_2 = S_3 e^{\mu(\alpha+\pi)}$

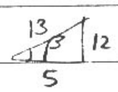
$S_3 e^{(\alpha+\pi)/\mu} R = S_3 R + W r$ رابطه 2 قرار داده

$S_3 = \frac{r}{R} \frac{1}{e^{\mu(\alpha+\pi)} - 1} W$ در ① قرار داده

مثال) نیروی کششی T و زاویه α کدام است؟ (از اصطکاک صرف نظر شود)







$\cos\beta = \frac{5}{13}$ $\quad \sin\beta = \frac{12}{13}$

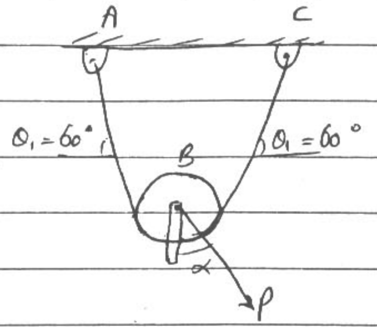
$\sum F_x = 0 \longrightarrow T\cos\alpha = 2T\cos\beta$

$\boxed{\cos\alpha = \frac{10}{13}} \rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \longrightarrow \sin\alpha = \frac{4\sqrt{6}}{13}$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow T\sin\alpha + 2T\sin\beta = W$

$$\boxed{T = \frac{W}{\sin\alpha + 2\sin\beta}}$$

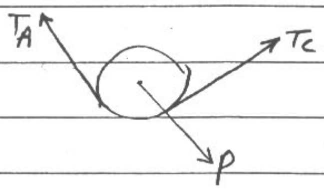
مثال) در تعادل کدام است P؟



زاویه تماس طناب

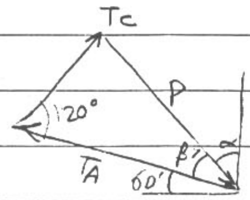
$\beta = \frac{2\pi}{3}$ $\mu = 0.3$

با نوشتن $\Sigma F_x = 0$ متوجه می‌شویم که $T_A > T_C$ است.



$$T_A = T_C e^{\mu\beta} = T_C \cdot e^{\frac{2}{3}\pi \times 0.3}$$

$$\boxed{T_A = 1.875\, T_C} \quad (1)$$



از راه اعضا سه نیرویی :

$$\alpha = 90 - \beta' - 60$$

β' مجهول

$$\boxed{\frac{T_C}{\sin\beta'} = \frac{P}{\sin 120}} \quad (2)$$

$$P^2 = T_C^2 + T_A^2 - 2T_C T_A \cos 120$$

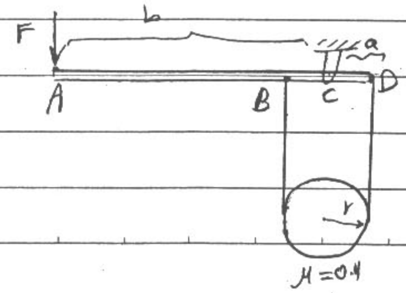
$$P^2 = T_C^2 + (1.8T_C)^2 - 2T_C(1.8)\cos(120)$$

$$\boxed{P = 2.528\, T_C} \quad (3)$$

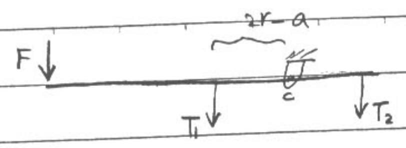
در رابطه (2) مقدار 3 را قرار می‌دهیم

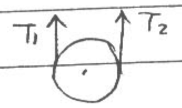
$\beta' = 20° \rightarrow \alpha = 90 - 20 - 60 = 10°$

مثال) حداقل a/r چقدر باشد تا ترمز خوداستی نداشته باشد؟



جواب : $\frac{a}{r} = \frac{1}{557}$





$$\Sigma M_c = 0 \longrightarrow -\cancel{Fb} - T_1(2r-a) + T_2 a = 0$$

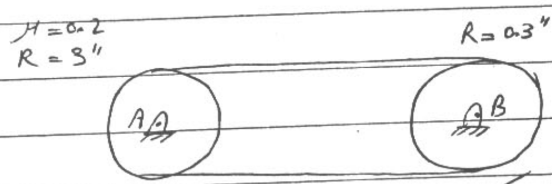
$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{2r-a}} \quad (1)$$

$$T_2 = T_1 e^{\pi \times 0.4}$$

$$T_2 = \frac{513}{3} T_1 \longrightarrow \boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{3}{513}} \quad (۲)$$

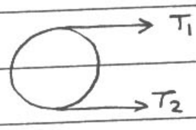
$$\frac{3}{513} = \frac{a}{2r-a} \Rightarrow \frac{a}{r} = \frac{1}{557}$$

مثال:



از تسمه ۲ نوع مسئله داریم.

تسمه پهن برای انتقال ممان پیچشی از قرقره A به B به کار می‌رود. حداکثر گشتاور پیچشی که منتقل می‌شود چقدر است مشروط بر اینکه ماکزیمم کشش مجاز تسمه 800lb است.



فرض $T_1 > T_2$

$$T_1 = T_2 e^{\mu \times 0.2} \qquad \boxed{T_1 = 1.875\, T_2}$$

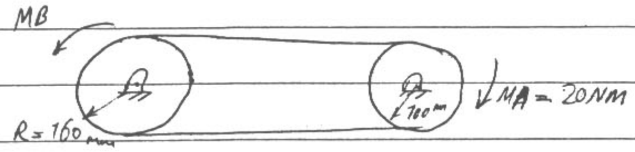
گشتاور اصطکاکی $T_f = (T_1 - T_2)R$

$T_1 = 800\ lb$

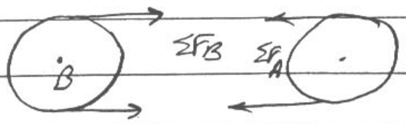
$T_2 = 427\ lb$

$$T_f = (800 - 427)3$$

$$T_f = 93.3\ lb.ft$$



سوال) ضریب اصطکاک چرخ و تسمه 0.4 است. حداکثر گشتاور M_A که به چرخ A اعمال می‌شود بدون اینکه لغزش ایجاد گردد 20 NM است. گزینه صحیح کدام است؟



1) گشتاور مقاوم روی قرقره B بیشتر از 32 NM است.
2) زاویه اصطکاک چرخ و تسمه تقریباً 45° است.
3) در صورت ایجاد لغزش، لغزش از قرقره A شروع می‌شود.
4) " " " B " " " " .

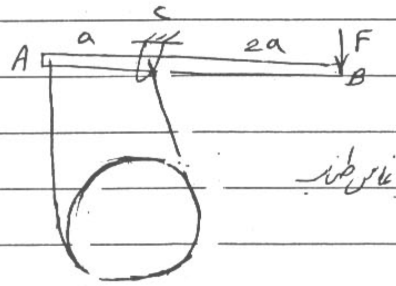
$$\Sigma F_B = \frac{M_B}{R_B}$$

$$\Sigma F_A = \frac{M_A}{R_A} \qquad \Sigma F_A = \Sigma F_B$$

$$\frac{M_A}{R_A} = \frac{M_B}{R_B} \rightarrow M_B = 32\ NM \rightarrow$$ پس گزینه 1 صحیح نیست.

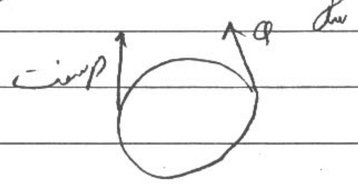
$$\tan\phi_0 = \mu = 0.4 \longrightarrow \phi_0 = 23^\circ$$ پس گزینه 2 صحیح نیست.

سوال) گشتاور ترمزی کدام است؟



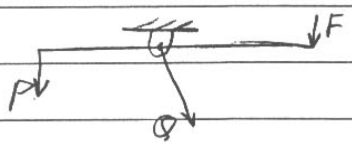
زاویه تماس طناب $\alpha = \frac{5}{4}\pi \qquad \mu = 0.6$

حل



$$M = (P - Q)R \quad (1)$$

$$P = Q e^{\frac{5}{4}\pi \times 0.5}$$

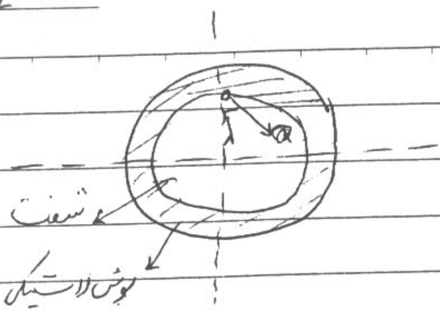


$$M = (P - Pe^{-\frac{5}{4}\pi \times 0.5}) \cdot R \quad (2)$$

$$\Sigma M_c = 0 \longrightarrow F.2a = P.a \longrightarrow \boxed{P = 2F}$$

$$M = 2F(1 - e^{-\frac{5}{4}\pi \times 0.5})R \qquad M = 1.72FR$$

مثال) ضریب اصطکاک شافت و بوش μ_0 از زاویه ϕ_0 است) حداقل مقدار λ برای اینکه شافت داخل بوش بچرخد کدام است؟



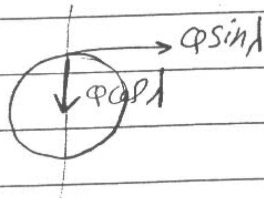
1) $\lambda=\phi_0$

2) $\lambda=\frac{1}{2}\phi_0$

3) $\lambda=\frac{1}{4}\phi_0$

حل: برای اینکه شفت بتواند داخل بوش بچرخد باید:

گشتاور نیروی محرک $T_{P_1} > T_{P_2}$ گشتاور نیروی اصطکاک



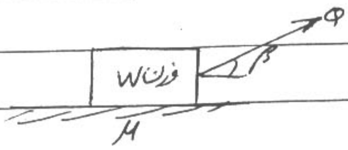
$$Q\sin\lambda \cdot R \geq \mu Q\cos\lambda \cdot R$$

$$\tan\lambda = \mu = \tan\phi_0 \qquad \boxed{\lambda=\phi_0}$$

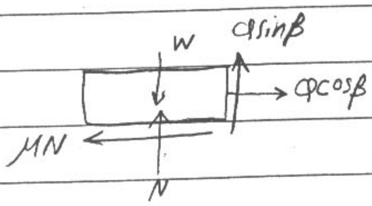
تذکر: در استاتیک اگر صحبت از ماکزیمم یا مینیمم یک پارامتر باشد، برای راه حل باید باریشتر یقین و مشتق گیری کار شود.

مثال) زاویه β چقدر است تا با مینیمم Q حرکت کند؟ همچنین $Q_{min}=?$

جواب: $\beta=\arctan\mu$



$$Q_{min}=\frac{\mu W}{\sqrt{1+\mu^2}}$$



$\sum F_x=0$

$\mu N = Q N\beta$

$\boxed{Q=\frac{\mu}{\cos\beta}N}$ ①

$\sum F_y=0$

$-W+N+Q\sin\beta=0$

$N=W-Q\sin\beta$ در ① قرار داده

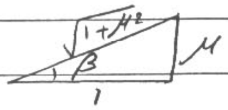
$$Q = \frac{\mu W}{\cos\beta + \mu \sin\beta}$$

Q مینیمم است اگر $y = \cos\beta + \mu\sin\beta$ ماکزیمم شود.

$$\frac{dy}{d\beta} = 0 \Rightarrow -\sin\beta + \mu\cos\beta = 0$$

$$\boxed{\tan\beta = \mu}$$

در رابطه بالا قرار داده و Q_{min} محاسبه شود.



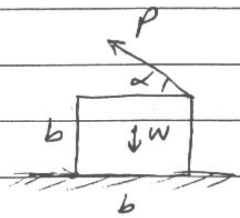
$$\sin\beta = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

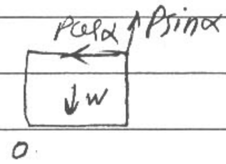
$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$Q_{min} =$ ✓

مثال) حداقل نیروی P با زاویه α که برای واژگون شدن لازم است؟

جواب: $P_{min} = \frac{\sqrt{2}}{4} W$ و $\alpha = 45^\circ$





$$\Sigma M_O = 0$$

$$-P\sin\alpha\, b - P\cos\alpha\, b + \frac{Wb}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{W}{2(\sin\alpha + \cos\alpha)}} \quad (1)$$

P مینیمم است اگر

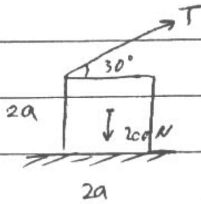
$$(y = \sin\alpha + \cos\alpha)_{max}$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 0 \rightarrow \cos\alpha - \sin\alpha = 0 \rightarrow \tan\alpha = 1 \quad \boxed{\alpha = 45^\circ}$$

در رابطه (1) قرار داده

$$P_{min} = \frac{\sqrt{2}}{4} W$$

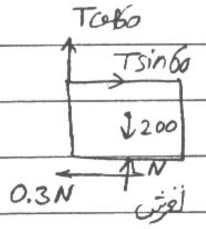
مثال: آیا جسم زیر واژگون می‌شود یا می‌لغزد؟



$\mu = 0.3$

هر دو حالت را باید حساب کنیم.

حل) حالت لغزش)

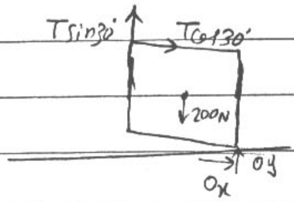


$\Sigma F_y = 0$

$T\cos 60° - 200 + N = 0$ (2)

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T\cos 30 = 0.3N \rightarrow N$ را حساب — در (1) قرار داده $\rightarrow T = 59N$

حالت واژگونی)

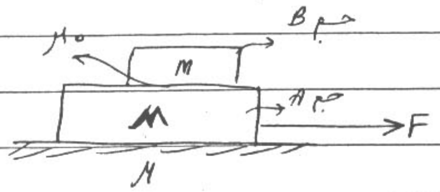


$\Sigma M_o = 0 \rightarrow -200(a) + T\cos 30°(2a) + T\sin 30°(2a) = 0$

$T = 36.5\ N$

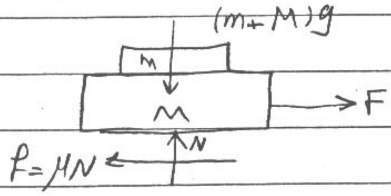
لذا جسم ابتدا واژگون می‌شود، چون تحت نیروی کمتری این پدیده فرا می‌رسد.

مثال) μ_0 حداقل باشد تا جسم B روی جسم A نلغزد؟



جواب) $\mu_0 = \dfrac{F}{(m+M)g} - \mu$

شرط یکسان بودن شتاب است، یعنی شتاب کل جسم نسبت به زمین برابر شتاب جسم A نسبت به زمین باشد.

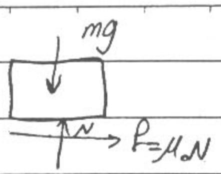


$\Sigma F_x = (m+M)a$

$F - \mu N = (m+M)a$ (1)

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow W = (m+M)g$

$(1) \rightarrow a = \dfrac{F - \mu(M+m)g}{m+M}$ (2)



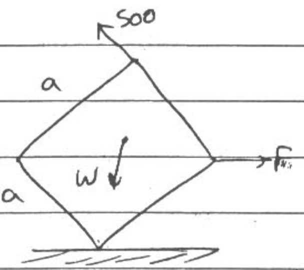
$$\Sigma F_x = ma \quad \text{شتاب ثابت است}$$
$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow N = mg$$
$$\mu_0 N = ma$$
$$\mu_0 mg = ma$$
$$a = \mu_0 g \quad (3)$$

$(2) = (3)$

$a = -\mu$

مثال) برآیند دو نیروی F و 500 چقدر است؟

(روش تصویر کردن)



$$R_{\text{برآیند}} = \sqrt{(\Sigma R_x)^2 + (\Sigma R_y)^2}$$

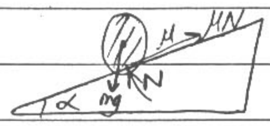
$$\Sigma R_x = F - 500\cos 45^\circ$$
$$\Sigma R_y = 500\cos 45^\circ$$

محاسبه F : $\quad \Sigma M_o = 0 \quad F.a\sin 135^\circ - 500\,a = 0$

$$\boxed{F = 500\sqrt{2}}$$

$$\Sigma R_x = 500\sqrt{2} - 500\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Sigma R_y = 500\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \boxed{R = 500\,N}$$

مثال) حداقل زاویه α برای اینکه شرط خود قفلی ایجاد بشود (یا جسم خود به خود پایین نیاید) کدام است)

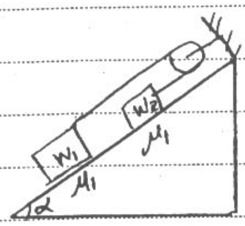


$$mg\sin\alpha \leq \mu N$$
$$N = mg\cos\alpha \Longrightarrow \tan\alpha = \mu$$
$$\tan\alpha \leq \mu$$

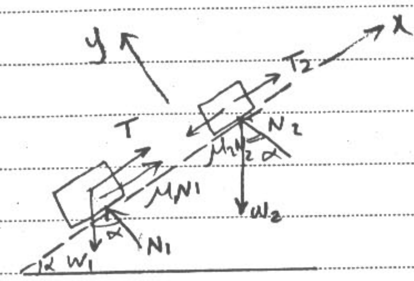
خود قفلی یا بدون حرکت به سمت پایین α

ادامهٔ استاتیک

مثال) نسبت $\frac{W_1}{W_2}$ چقدر باشد تا جسم بدون برخورد به یکدیگر در شرف حرکت باشند.



جواب: $\frac{W_1}{W_2}=\frac{\mu_2+\tan\alpha}{\mu_1-\tan\alpha}$



حل: جهت حرکت W_1 به سمت پایین

$T_1=T_2$

$\sum F_x=0$

$\mu_1 N_1+T-W_1\sin\alpha=0$ ①

$\sum F_y=0 \longrightarrow N_1=W_1\cos\alpha$ ②

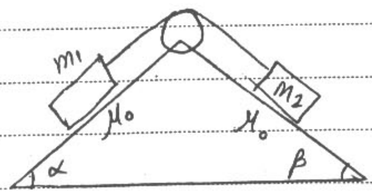
② را در ① قرار داده T محاسبه می‌شود.

$T=W_1\sin\alpha-\mu_1 W_1\cos\alpha$ ③

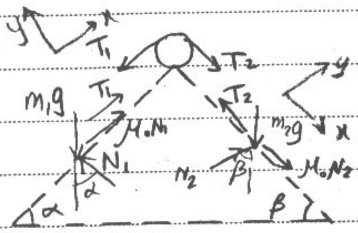
به همین ترتیب برای جسم ② مقدار T را محاسبه و مساوی رابطه ③ قرار می‌دهیم.

مثال) نسبت $\frac{m_1}{m_2}$ برای اینکه سیستم به سمت چپ حرکت کند چیست؟ زاویه اصطکاک ϕ_0

جواب: $\frac{m_1}{m_2}=\frac{\sin(\beta+\phi_0)}{\sin(\alpha-\phi_0)}$



حل: سیستم به سمت چپ حرکت می‌کند (در شرف حرکت)



Subject:
Year. Month. Date. ( )

ادامه مثال قبل:

$T_1 = T_2 = T$

$$1 \text{ جسم}: \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow T_1 + \underbrace{\mu_0}_{\tan\phi_0} N_1 - m_1 g \sin\alpha = 0 \quad ①$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 \cos\alpha = m_1 g \quad ②$$

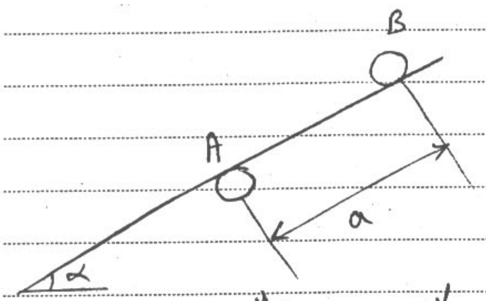
$$1, 2 \Rightarrow T \text{ محاسبه}$$

به همین ترتیب برای جسم ۲ و مقادیر T را یکسان قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g \sin\alpha - m_2 g \cos\alpha \tan\phi_0 \\ T_2 = m_2 g \sin\beta + m_2 g \cos\beta \tan\phi_0 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

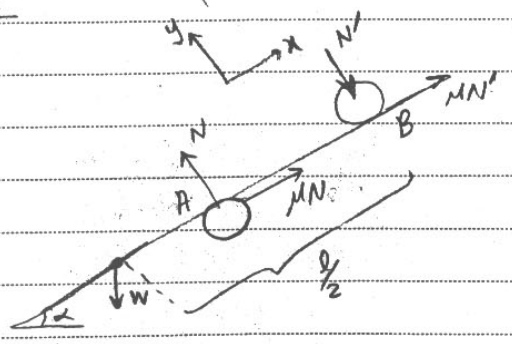
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_0 \cos\beta + \sin\beta}{-\mu_0 \cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{\frac{\sin\phi\cos\beta + \sin\beta\cos\phi}{\cos\phi}}{\frac{-\sin\phi\cos\alpha + \cos\phi\sin\alpha}{\cos\phi}} = \frac{\sin(\phi+\beta)}{\sin(\alpha-\phi)}$$

مثال) بین دو پین A و B به فاصله a یک تیر قرار دارد. ضریب اصطکاک پین‌ها و تیر μ است. مینیمم طول ℓ که میله حرکت نکند.



جواب: $\ell = a\left(1 + \frac{\tan\alpha}{\mu}\right)$

حل:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow W\cos\alpha \cdot \frac{\ell}{2} - N \cdot a = 0 \qquad \ell = \frac{2aN}{W\cos\alpha} \quad ①$$

محاسبه N:

$\sum F_x = 0$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow +\mu N' + \mu N - W\sin\alpha = 0 \Rightarrow -N' + N - W\cos\alpha = 0$$

PAPCO

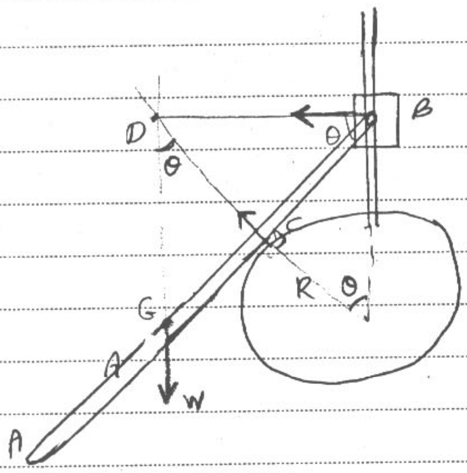
$$\begin{cases} N+N' = \dfrac{w\sin\alpha}{\mu} \\ N-N' = w\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow N = \frac{w\sin\alpha}{2\mu} + \frac{w\cos\alpha}{2}$$

سه رابطه ① قرار میدهیم

مثال) θ تعادل کدام است؟ اصطکاک صفر است. وزن میله w و $AB=2R$

تذکر مهم ← نوع مسائل سه نیرویی: a) از روش انرژی که قبلاً حل شد یعنی میتنیم 2 تا نیرو کار انجام میدهند

b) این نوع: یعنی یک نیرو کار انجام داده لذا از ثبات سه نیرویی مسائل حل میشود.



در اینجا حالت سه نیرویی است.

جواب: $\tan^3\theta + \tan\theta - 1 = 0$

حل: $BG = R = BC + CG$

$BC = R\tan\theta$

$CG = \underset{\sim}{CD}\tan\theta = BC\tan^2\theta$

از طرفی $CD = BC\tan\theta$

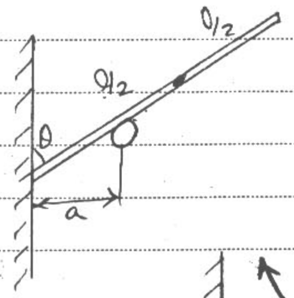
$R = R\tan\theta + R\tan^3\theta = 0$

$\Rightarrow \tan^3\theta + \tan\theta - 1 = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

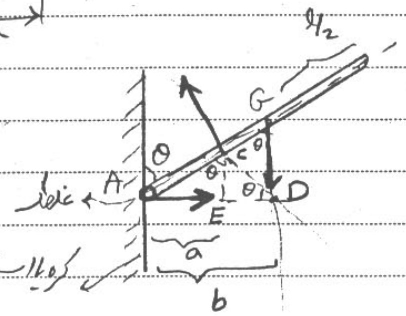
مثال) میله نازک به وزن W و طول l می‌باشد. زاویه θ تعادل کدام است؟ اصطکاک دیوار و پین با میله صفر است.

* اگر میله سبک باشد می‌توان از وزن آن صرف نظر کرد.



جواب: $\sin^3\theta = 2a/l$

سه تا نیرو دارم ← عضو سه نیرویی
تنها نیروی خارجی که کار انجام می‌دهد وزن است.
← نوع ۲ یعنی مثلث نیروها را تشکیل می‌دهیم.

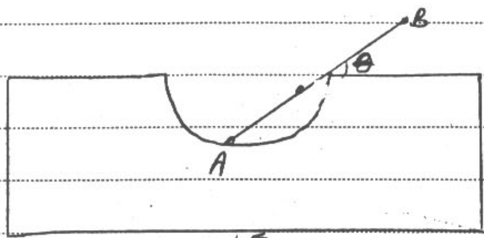


$\triangle ACD$: $AC = b\sin\theta$ ①

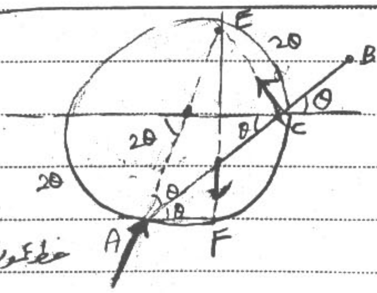
$\triangle ACE$: $a = AC\sin\theta$ ② $\Rightarrow a = b\sin^3\theta$

$\triangle AGD$: $b = AG\cdot\sin\theta = l/2\,\sin\theta \Rightarrow$

مثال) θ تعادل کدام است؟ $AB = 3R$ و اصطکاک صفر است. وزن میله W است.



مسئله از نوع 3 نیرویی است.



خط عمود از مرکز دایره می‌گذرد
؟؟ مهم ؟؟

نقطه E روی محیط دایره است. زیرا زاویه محاطی C، $90°$ است.

$\triangle AGF$: $AF = 1.5R\cos\theta$ ①

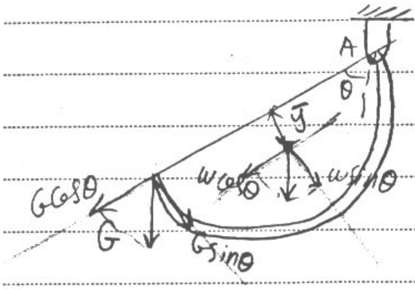
$\triangle AEF$: $AF = 3R\cos 2\theta$

?

PAPCO

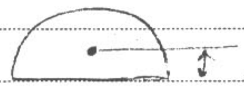
$$1.5R\cos\theta = 3R\cos 2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$8\cos^2\theta - 3\cos\theta - 4 = 0$$
$$\cos\theta = 0.7$$

مثال) θ تعادل کدام است؟ وزن میله نیم دایره G می‌باشد.

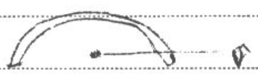


چون دوتا از نیروها موازی‌اند پس از روابط تعادل استفاده می‌کنیم.

جواب: $\tan\theta = \dfrac{2W}{\pi(W+2G)}$



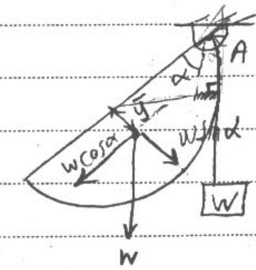
$\bar{y} = \dfrac{4R}{3\pi}$

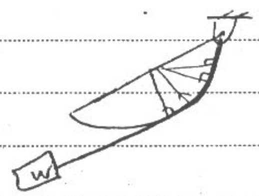


$\bar{y} = \dfrac{2R}{\pi}$

$$\Sigma M_0 = 0$$
$$-W\sin\theta R + W\cos\theta \cdot \frac{2R}{\pi} - G\sin\theta \cdot 2R = 0$$
$$\tan\theta = \frac{2W}{\pi(W+2G)}$$

مثال) وزن دیسک W است. θ تعادل کدام است؟



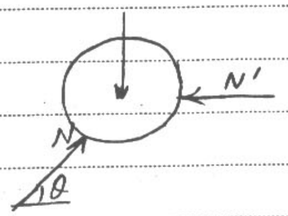


تا هر جا نخ چسبیده بر دیسک عمود است.

$$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow W(R - R\sin\alpha) - W\sin\alpha \cdot R + W\cos\alpha\left(\frac{4R}{3\pi}\right) = 0$$

جواب: $\dfrac{4}{3\pi}\cos\theta - 2\sin\theta + 1 = 0$

در اینجا چون در سه گزینه علامت بالای یک و فقط در یکی علامت زیر یک است جواب واضح است.

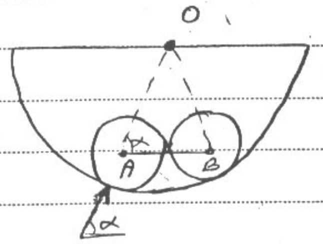


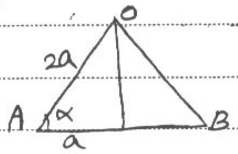
$\Sigma F_x = 0$

$-N' + N\cos\alpha = 0$

$\frac{N'}{N} = \cos\alpha \implies$ چون $\cos\alpha$ همواره از یک کمتر است پس گزینه ۱ صحیح است.

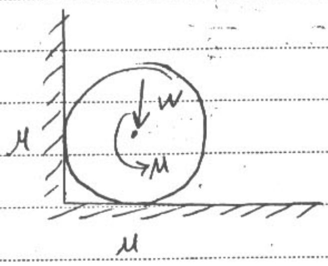
حل تشریحی :





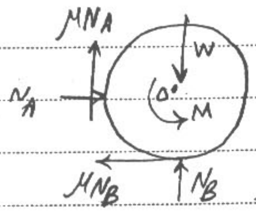
$\cos\alpha = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \implies \boxed{\frac{N}{N'} = 0.5}$

مثال) مقدار M برای شروع حرکت کدام است؟



وقتی یک کره بین دو دیواره قرار می‌گیرد لغزش داریم

جواب) $M = \mu W R \left[\frac{1+\mu}{1+\mu^2}\right]$



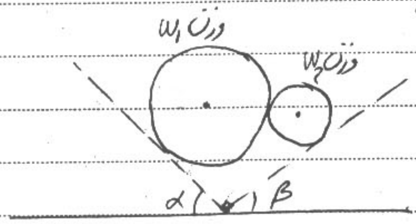
$\Sigma M_O = 0$

$-M + \mu N_B R + \mu N_A R = 0$

$M = \mu R (N_A + N_B)$

$\Sigma F_x = 0$ $\quad N_A = \frac{\mu w}{1+\mu^2} \quad N_B = \frac{\mu w}{1+\mu^2}$

$\Sigma F_y = 0$



مثال) نیروی تماس را محاسبه کنید (سه سطح تماس وجود دارد) اصطکاک صفر است.

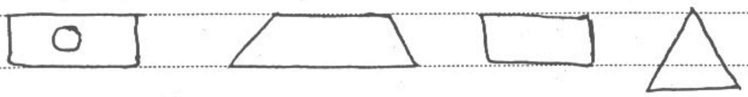
Subject:
Year. Month. Date. ( )

* ممان دوم (اول) سطح *

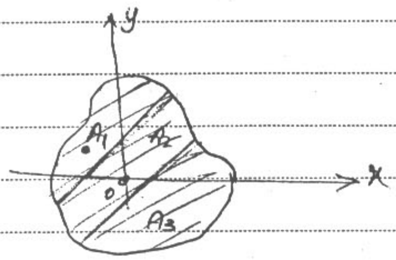
مطالعه شخصی :

محاسبات ابتدائی محاسبه I_x ، I_y و I_{xy}

مقاطع ساده :



روابط کلی :



ممان نیرو
ممان سطح
ممان حجم

$A_1y_1 + A_2y_2 + \dots = (A_1 + A_2 + A_3)\bar{y}$ $\qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{A}$

$A_1x_1 - \dots = (A_1 + A_2)\bar{x}$ $\qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{A}$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} = \frac{Q_x}{A}$$

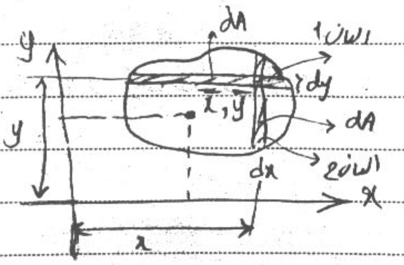
فرمول کلی برای مرکز سطح :

روابط روبرو برای سطوح نامعین به کار می رود.

ممان اول: $Q_x = \int y\,dA$ ، $Q_y = \int x\,dA$

ممان دوم: $I_x = \int y^2\,dA$ ، $I_y = \int x^2\,dA$

$I_{xy} = \int xy\,dA$



تذکر مهم : I_x و I_y محاسبه شود.

PAPCO

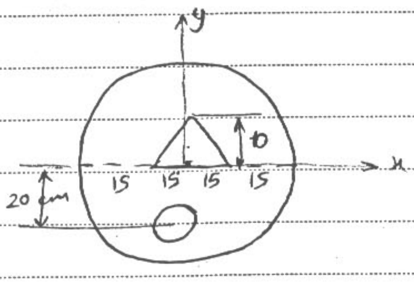
$I_x = \int y^2 dA$ * , $Q_x = \int y\, dA$ *

$I_y = \int x^2 dA$, $Q_y = \int x\, dA$

برای محاسبهٔ روابط * I_x و Q_x حتماً بایستی با توجه به شکل المان 1 انتخاب شود نه المان 2.
المان افقی

برای $I_y = \int x^2 dA$, $Q_y = \int x\, dA$ حتماً المان 2 انتخاب شود

برای محاسبهٔ A یعنی $A = \int dA$ المان 1 یا 2 فرقی ندارد



مثال) دایره بزرگ ورق دایره‌ای به قطر 60cm می‌باشد. یک مثلث متساوی الساقین بریده‌ایم. می‌خواهیم سوراخ دیگری را در پایین ایجاد کنیم. قطر سوراخ دیگر دایره‌ای به مرکز A و به فاصلهٔ 20cm از مرکز دایره چقدر باشد تا مرکز شکل کل همان مرکز دایره اصلی باشد.

$$\bar{y} = \frac{\cancel{y_1 A_1} + y_2 A_2 + y_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 0$$

در مسائلی که شکل‌ها معین هستند از رابطه روبرو استفاده می‌کنیم.

$y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3 = 0$

A برای سوراخ و مثلث را باید منفی باشند

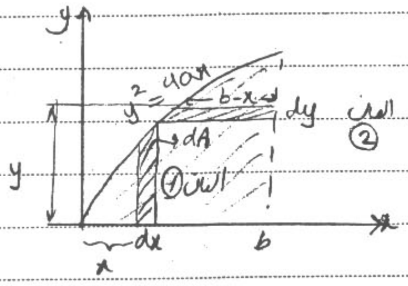
دایره بزرگ $\left|\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ A_1 = \pi(30)^2 \end{array}\right.$

سوراخ $\left|\begin{array}{l} y_3 = -20 \\ A_3 = \frac{\pi d^2}{4} \end{array}\right.$

مثلث $\left|\begin{array}{l} y_2 = 10/3 \\ A_2 = \frac{30 \times 10}{2} \end{array}\right.$

در رابطه بالا قرار می‌دهیم ← $d = 5.6\,cm$

مثال) مرکز سطح کدام است؟



جواب) $\bar{y} = \frac{3}{4}(ab)^{1/2}$, $\bar{X} = \frac{3}{5}b$

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dA}{A} = \frac{Q_x}{A}$$

محاسبه A : از المان 1 یا 2 استفاده می‌کنیم

المان 1 : $A=\int dA=\int y\,dx=\int_0^b (4ax)^{\frac{1}{2}}\,dx$ ✓ بهتر است.

المان 2 : $A=\int dA=\cancel{\int (b-x)\,dy}$

$A=2a^{\frac{1}{2}}\int_0^b x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{4}{3}(ab^3)^{\frac{1}{2}}$ تست ۱۰ ص ۱۴۲

محاسبه $\bar{x}$:

$\bar{x}=\dfrac{\int x\,dA=Q_y}{A}$

برای Q_y حتماً از المان 1 استفاده شود چون

$Q_y=\int x\,dA=\int_0^b xy\,dx$

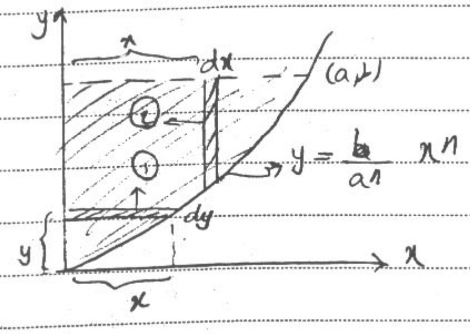
$Q_y=2a^{\frac{1}{2}}\int_0^b x^{\frac{3}{2}}\,dx=\frac{4}{5}(ab^5)^{\frac{1}{2}}$

برای محاسبه Q_x حتماً از المان 2 استفاده شود.

$Q_x=\int y\,dA=\int y(b-x)\,dy=\int_0^{2\sqrt{ab}} y(b-x)\,dy=\int_0^{2\sqrt{ab}} y\left(b-\frac{y^2}{4a}\right)dy$

$=ab^2 \Longrightarrow$ $\bar{x}$ و $\bar{y}$ محاسبه می‌شوند

مثال) $\bar{y}$ چقدر است؟



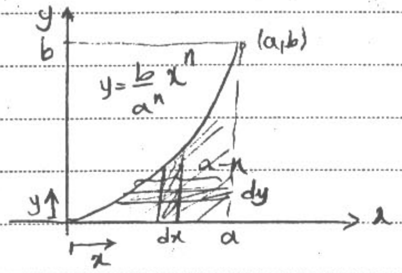
$\bar{y}=\dfrac{Q_x}{A}$ $\qquad$ $\bar{x}=\dfrac{Q_y}{A}$

$A=\int dA=\int_0^b x\,dy=$

$Q_x=\int y\,dA=\int yx\,dy$ المان 1

$Q_y=\int x\,dA=\int x(b-y)\,dx$ المان 2

مثال) $\bar{x}$ و $\bar{y}$ چقدر است؟



$$A=\int_0^a y\,dx=\int_0^a \frac{b}{a^n}x^n\,dx$$

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}=\frac{Q_y}{A} \rightarrow \text{المان عمودی}$$

$$Q_y=\int x\,dA=\int_0^a x\,y\,dx=\int_0^a x^{n+1}\frac{b}{a^n}\,dx$$

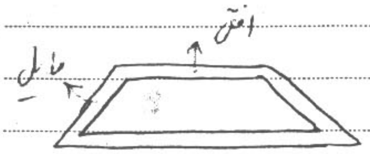
$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}=\frac{Q_x}{A} \rightarrow \text{المان افقی}$$

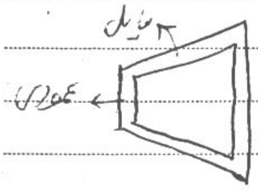
$$Q_x=\int y\,dA=\int_0^b (a-x)\frac{b}{a^n}x^n\,dy$$

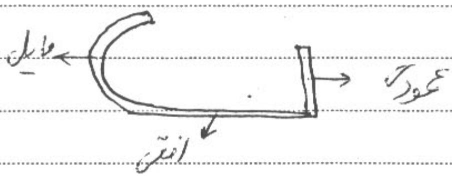
تذکر مهم: برای محاسبه I_x و I_y یا (Q_x و Q_y) برای مقاطع جدار نازک حتماً جملات t^2 و به بالا حذف شوند

برای محاسبه I_x و I_y (Q_x یا Q_y) سه حالت وجود دارد:

مقاطع جدار نازک معمولاً ترکیبی از اعضای افقی، عمودی و مایل می‌باشند

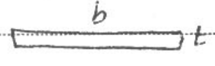






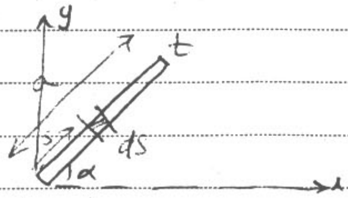
* مقاطع دایره‌ای را مایل درنظر میگیریم

برای مقاطع افقی یا عمودی از فرمول $\frac{1}{12}bh^3$ استفاده می‌شود



$I_x=\frac{1}{12}bt^3$

$I_y=\frac{1}{12}tb^3$ ؟



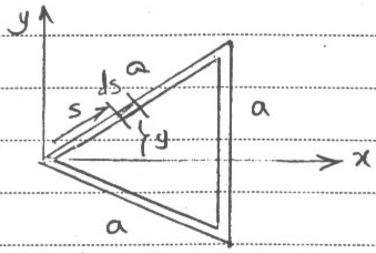
برای مقاطع مایل ← حتماً از انتگرال گیری استفاده می‌کنیم.

$I_x = ?$

$Q_x = ?$

$I_x = \int y^2 dA$ و $Q = \int y\, dA$

مثلاً $I_x = \int_0^a (S\sin\alpha)^2\, t\, ds$, $Q_x = \int_0^a S\sin\alpha . t\, ds$

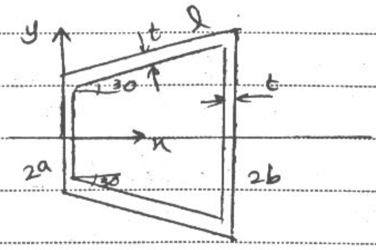


مثال) I_x کدام است؟

$I_x = \frac{1}{12} t a^3 + 2\int y^2 dA = \frac{1}{12} t a^3 + 2\int_0^a (S\sin 30^\circ)^2 t . ds$

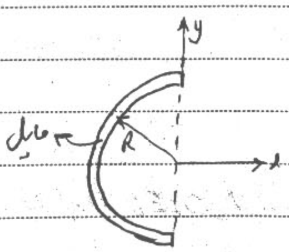
$I_x = \frac{1}{12} t a^3 + 2 (\sin 30^\circ)^2 . t \frac{1}{3} a^3$

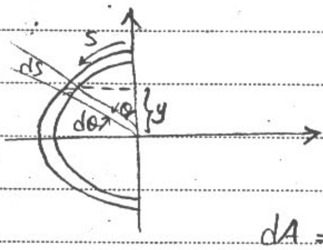
مثال)



$I_x = \frac{1}{12} t (2a)^3 + \frac{1}{12} t (2b)^3 + 2\int y^2 dA \to 2\int_0^\ell (S\sin 30 + a)^2\, t\, ds$

مثال) $I_x = ?$





$I_x = \int y^2 dA$

$y = R\cos\theta$

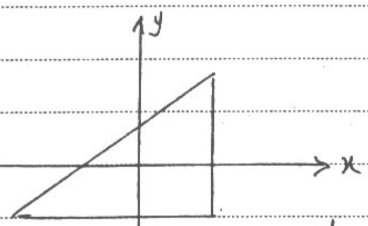
$dA = t\, ds = t R\, d\theta$

$\boxed{I_x = \int_0^\pi (R\cos\theta)^2\, t\, R\, d\theta}$

Subject: ۳۵
Year. Month. Date. ( )

ممان دوم سطح (یا اول سطح) در اثر چرخش سطح :

مثال) در مثلث زیر



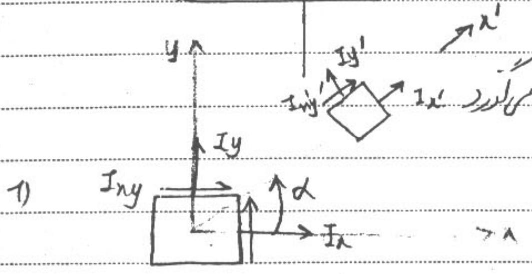
$I_x = 1458\ mm^4$

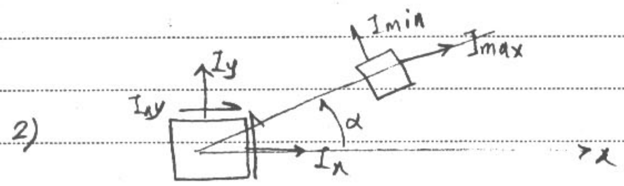
$I_y = 365\ mm^4$ $I_{xy} = 365\ mm^4$

تعیین کنید :

۱) حداکثر ممان دوم سطح متعلق را شده نسبت به محوری که از مرکز سطح می گذرد

۲) جهت محوری که ممان دوم سطح نسبت به آن ماکزیمم می باشد .





حل $$I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$I_{max} = 15687.9\ mm^4$

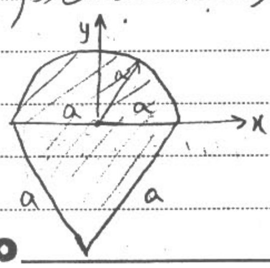
$\tan 2\alpha = \dfrac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$ $\alpha = 106.9°$

بحث کلی :

در استاتیک بحث دو بعدی است .

مثال) در شکل زیر ممان دوم سطح نسبت به محور x و y ، I_x و I_y است . مطلوبست محاسبه ممان دوم سطح حول محور x' که با محور x زاویه 45° می سازد . * در خلاف جهت عقربه ساعت

در خلاف جهت عقربه ساعت می چرخانیم .

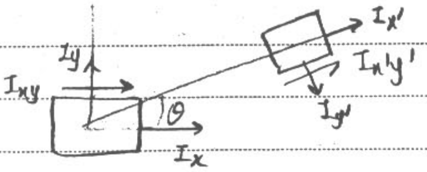


۱) $I_{x'} = \frac{\sqrt{2}}{2} I_x - \sqrt{2} I_y$

$I_{y'} = I_x - \frac{\sqrt{2}}{2} I_y$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



روش دوم) روش ماتریس انتقال

$$\begin{cases} I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = I_{max} + I_{min} \\ I_x I_y - I_{xy}^2 = I_{x'} I_{y'} - I_{x'y'}^2 = I_{max} \cdot I_{min} \end{cases}$$

روابط فوق روابط مهم است. (روش تستی)

روش انتقال محور ، $[I'] = [t][I][t]^T$ ①

$$\begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix} = [t] \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix} [t]^T$$

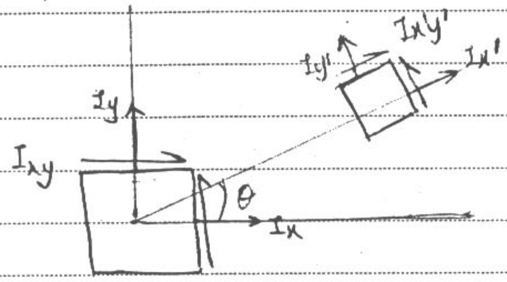
	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$-\sin\theta$	$\cos\theta$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} I_{x'} & I_{x'y'} \\ I_{y'x'} & I_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

از حل این ماتریس روابط روش ۱ نیز حاصل می شود.

بحث کلی :

روش اول :

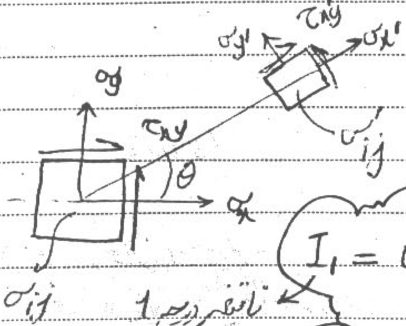


$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2\theta + I_x \sin^2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

اینها برای max , min نیست.



روش دوم) روش ماتریس انتقال

ا 90% مسائل با این فرمولها حل می شود.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_1 + \sigma_2$$

مهم

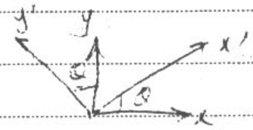
$$I_2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_{x'} \sigma_{y'} - \tau_{x'y'}^2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2$$

PAPCO

$$\boxed{[\sigma'_{ij}] = [t][\sigma_{ij}][t]^T}$$ مهم

ماتریس انتقال

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix} = [t]\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}[t]^T$$



	x	y
x'	l_x	l_y
y'	m_x	m_y

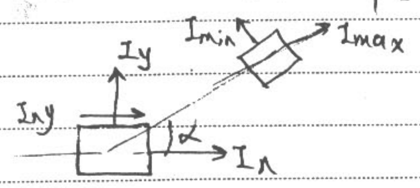
cos زاویه بین محور x' با x

cos زاویه بین محور y' با y

	x	y
x'	$\cos\theta$	$\sin\theta$
y'	$\cos(90+\theta)$	$\cos\theta$

$$[t] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \longrightarrow [t]^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

روش سوم : احتمالاً ماکزیمم ممان دوم سطح (I_{max}) یا مینیمم ممان دوم سطح (I_{min}) و همچنین زاویه آن یعنی α مجهول است



روش تستی :
$$I_x + I_y = I_{max} + I_{min}$$
$$I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 = I_{max} \cdot I_{min}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$[I] = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix}$$

محاسبه I_{min} و I_{max} :

$$\begin{vmatrix} I_x - I & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y - I \end{vmatrix} = 0$$

$$I^2 + AI + B = 0$$

از ریشه‌های این معادله I_{max} و I_{min} استخراج می‌شود.

$$I_{max,\,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^{\,2}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$ زاویه

PAPCO